Э.М. Галеев
В.М. Тихомиров

ОПТИМИЗАЦИЯ

- Теория
- Примеры
- Задачи

Эдиториал УРСС • Москва • 2000

ББК 22.18я73

Настоящее издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (*проект* № 98-01-14126)

Галеев Эльфат Михайлович, Тихомиров Владимир Михайлович

Оптимизация: теория, примеры, задачи. — М.: Эдиториал УРСС, 2000. — 320 с.

ISBN 5-8360-0041-7

Книга посвящена важнейшим проблемам оптимизации. Она построена на базе преподавания теории оптимизации на механико-математическом факультете МГУ. В основе ее лежат курсы, прочитанные в 1998/99 годах Э. М. Галеевым (Главы 1–5) и В. М. Тихомировым (Глава 6). Рассматриваются фрагменты следующих разделов теории экстремальных задач: линейного и выпуклого программирования, математического программирования, классического вариационного исчисления и оптимального управления. Приводятся как необходимые так и достаточные условия экстремума. Для изучения этих разделов в необходимом объеме даются элементы функционального и выпуклого анализа. В каждом параграфе после теоретической части приводятся примеры решения задач, предлагаются задачи для решения на семинарах, контрольных и для домашних заданий. Дается обзор общих методов теории экстремума.

Для студентов вузов по специальностям «Математика», «Прикладная математика», а также для аспирантов, преподавателей и научных работников.

9 785836 000417

ISBN 5-8360-0041-7

Предисловие

Задачи на отыскание наибольших и наименьших величин являются актуальными на протяжении всей истории развития человечества. Особенное значение они приобретают в настоящее время, когда возрастает важность в наиболее эффективном использовании природных богатств, людских ресурсов, материальных и финансовых средств. Все это приводит к необходимости отыскивать наилучшее, или как говорят, *оптимальное* решение того или иного вопроса.

Первые задачи на максимум и минимум были поставлены и решены в глубокой древности, когда математика только зарождалась как наука. Теория экстремальных задач начала создаваться в начале 17 века, и затем она активно развивалась вплоть до наших дней, включая в свою орбиту крупнейших математиков таких как Ферма, Ньютон, Лейбниц, Бернулли, Лагранж, Эйлер, Пуанкаре, фон Нейман, Канторович, Понтрягин и других. В наше время невозможно мыслить себе полноценное математическое образование без элементов теории экстремума.

Книга состоит из 6 глав. Первые пять глав, составляющих первую часть, написаны Э. М. Галеевым. Они содержат материал курсов оптимизации, читаемых на курсах лекций по методам оптимизации, линейному программированию, оптимальному управлению и вариационному исчислению на механико-математическом факультете Московского государственного университета, а также в некоторых институтах естественно научного профиля. Данный курс лекций был разработан целым рядом профессоров и преподавателей механико-математического факультета МГУ. На начальном этапе курс формировался усилиями В. М. Алексеева, В. М. Тихомирова, С. В. Фомина. Методическая разработка доказательств, а так же подбор и составление задачного материала во многом были проведены Э. М. Галеевым. При написании этих глав использовался материал, содержащийся в ранее опубликованных книгах: (АТФ) Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. «Оптимальное управление», М.: Наука, 1979; (АГТ) Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М. «Сборник задач по оптимизации», М.: Наука, 1984; (ГТ) Галеев Э. М., Тихомиров В. М. «Краткий курс теории экстремальных задач», М.: Изд-во МГУ, 1989. Эта часть книги является расширением вариантом пособия Галеева Э. М. «Курс лекций по вариационному исчислению и оптимальному управлению», М.: Изд-во мехмата МГУ, 1996. Она предназначена для курсов, включающих элементы теории экстремума любого уровня и приспособлена к действующим ныне программам. Все чертежи в *LATEX'е 2ε* выполнены Альфирой Галеевой.

В этой части рассматриваются следующие разделы теории экстремальных задач: задачи без ограничений, гладкие задачи с ограничениями типа равенств и неравенств, линейное программирование, классическое вариационное исчисление, оптимальное управление, необходимые и достаточные условия экстремума в классическом вариационном исчислении.

При изучении данных разделов требуется знание основ математического анализа и линейной алгебры, изучаемых на первых двух курсах технических и педагогических вузов, университетов. Предполагается, что читатели знакомы с элементарными приемами дифференцирования и интегрирования функций, умеют решать простейшие дифференциальные уравнения, знакомы с элементарными навыками работы с матрицами (умножением, транспонированием, нахождением обратной). Все остальные используемые в курсе математические понятия подробно определяются.

В первой главе рассматриваются задачи без ограничений, задачи с ограничениями типа равенств, с ограничениями типа равенств и неравенств для числовых функций n переменных и в нормированных пространствах. Для каждого типа задач приводятся решения соответствующих примеров. Одним из примеров является старинная задача Аполлония о нормалях к эллипсу. Методами теории экстремальных задач решается задача из курса алгебры о приведении квадратичной формы к главным осям. Большое внимание уделяется выпуклым задачам. Даются элементы выпуклого анализа, причем выпуклый анализ в зависимости от уровня математической подготовки читателя может рассматриваться как в конечномерных пространствах, так и в линейных нормированных пространствах, вводится понятие субдифференциала и доказывается теорема Куна—Таккера. В этой же главе даются некоторые элементы функционального анализа и дифференциального исчисления в нормированных пространствах.

Вторая глава посвящена линейному программированию. В ней вначале даются постановки задач линейного программирования, правило решения задач в канонической форме по симплекс-методу, приводятся с решениями примеры. Вводится понятие двойственности, затем проводится строгое обоснование симплекс-метода, дается ряд методов нахождения первоначальной крайней точки. Полученные навыки применяются к некоторым наиболее известным типам задач линейного программирования — транспортным задачам и задачам о назначении. Основная цель при этом — ознакомление студентов с имеющимися методами решения задач линейного программирования и проведение обоснования этих методов. Обоснование проводится таким образом, чтобы для решения подобных задач в дальнейшем возможно было бы самостоятельно создать метод решения и провести его обоснование. В пособии приведены доказательства теоремы существования решений и теоремы двойственности, позволяющие более глубоко понять данный курс.

В третьей главе приводятся следующие элементарные задачи классического вариационного исчисления: простейшая задача, задача Больца, изопериметрическая задача. Все эти задачи являются частным случаем более общей задачи Лагранжа. Как частный случай задачи Лагранжа рассматриваются задача с подвижными концами и задача со старшими производными.

В четвертой главе рассматриваются задачи оптимального управления. Приводится формулировка и доказательство принципа максимума Понтрягина в общем случае, а также принципа максимума для задачи со свободным концом. Решаются простейшая задача о быстродействии, задача Ньютона и ряд других задач оптимального управления.

В пятой главе даны необходимые и достаточные условия экстремума в простейшей задаче классического вариационного исчисления.

Глава 6, составляющая вторую часть, написана В. М. Тихомировым и посвящена обзору всей теории экстремальных задач с единых современных позиций. Она основана на записях курса лекций, читавшегося Тихомировым В. М. на механико-математическом факультете МГУ осенью 1998 года. В ней в сжатой форме выражено воззрение на теорию экстремальных задач, составившее стержень книг Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. «Теория экстремальных задач», М.: Наука, 1974 и Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. «Оптимальное управление», М.: Наука, 1979.

Эта часть рассчитана на преподавателей вузов и университетов (в особенности, на ведущих занятия по курсам оптимизации), студентов старших курсов университетов и научных работников, интересующихся проблемами теории экстремума и местом, которое занимает этот раздел анализа в современной математике. Глава 6 написана в надежде на то, что она поспособствует модернизации курсов оптимизации в будущем.

Глава 6 состоит из пяти параграфов, посвященных принципу Лагранжа для необходимых условий экстремума, возмущениям экстремальных задач, существованию решений, алгоритмам оптимизации. Отдельный пятый параграф посвящен решению конкретных задач.

Э. М. Галеев,
В. М. Тихомиров

Часть I

Введение

Теорию задач на отыскание наибольших и наименьших величин называют *теорией экстремальных задач*.

Слово *maximum* по латыни означает «наибольшее», слово *minimum* — «наименьшее». Оба этих понятия объединяются словом «экстремум» (от латинского *extremum*, означающего «крайнее»). Слово «экстремум», как термин, объединяющий понятия «максимум» и «минимум», ввел в употребление Дюбуа-Реймон. Ныне раздел анализа, в котором изучают разнообразные задачи на максимум и минимум, называют *теорией экстремальных задач*.

Запись задачи в виде $f(x) \to \text{extr}$ означает, что мы должны решить и задачу на минимум, и задачу на максимум.

Задачу на максимум всегда можно свести к задаче на минимум, заменив задачу $f(x) \to \max$ задачей $\tilde{f}(x) \to \min$, где $\tilde{f}(x) = -f(x)$, и наоборот. Поэтому в тех случаях, когда формулировки теорем для задач на минимум и максимум различны, мы иногда будем ограничиваться рассмотрением задачи на минимум.

Задачи на максимум и минимум изначально формулируются, как правило, на языке той области, в которой они возникают. А исследуют их средствами математического анализа. Для того, чтобы можно было воспользоваться этими средствами, необходимо перевести формулировку задачи на язык математического анализа. Такой перевод называется *формализацией*.

В общем виде формализованная задача выглядит следующим образом: *найти экстремум (максимум или минимум) функции* $f\colon X \to \mathbf{R}$, *определенной на некотором пространстве* X *при ограничении* $x \in D$ $(D \subset X)$. Кратко записываем так:

$$f(x) \to \text{extr}; \quad x \in D. \tag{P}$$

Для функции одной переменной $X = \mathbf{R}$, для функции нескольких переменных $X = \mathbf{R}^n$. В более общих случаях X может быть линейным, нормированным или топологическим пространством. Ограничение $x \in D$ может быть записано в виде включения, а также в виде уравнений или неравенств. (P) — нумерация (обозначение) задачи (от английского слова *problem* — задача). *Множество допустимых элементов* в задаче (P) обозначаем $D = D(P)$ или D_P. Если множество допустимых элементов

совпадает со всем пространством $(D = X)$, то задачу (P) называем *задачей без ограничений*.

Решением задачи (P) на минимум является точка $\hat{x}$ такая, что $f(x) \geqslant f(\hat{x})$ для всех точек $x \in D(P)$. В этом случае мы пишем $\hat{x} \in \operatorname{absmin} P$. Такой минимум называется еще абсолютным, или глобальным. Аналогично определяется абсолютный максимум в задаче $(\operatorname{absmax} P)$. Величина $f(\hat{x})$, где $\hat{x}$ — решение задачи, называется *численным значением задачи* и обозначается $S_{\min}$ или $S_{\max}$ (иногда, чтобы подчеркнуть глобальность экстремума, S_{absmin} или S_{absmax}). Множество решений задачи (P) обозначается $\operatorname{Arg} P$. Если экстремум не достигается, то мы должны указать последовательность точек x_n, на которой значение функции $f(x_n)$ стремится к величинам $S_{\min}$ и $S_{\max}$.

При решении задачи следует отыскать не только абсолютные (глобальные) экстремумы задачи, но и локальные экстремумы. Точка $\hat{x}$ является *точкой локального минимума* в задаче (P) (пишем $\hat{x} \in \operatorname{locmin} P$), если существует окрестность U точки $\hat{x}$ такая, что $f(x) \geqslant f(\hat{x})$ для любой допустимой точки x из этой окрестности $(\forall\ x \in D \cap U)$. Аналогично точка $\hat{x}$ является *точкой локального максимума* в задаче (P) (пишем $\hat{x} \in \operatorname{locmax} P$), если существует окрестность U точки $\hat{x}$ такая, что $f(x) \leqslant f(\hat{x})$ $\forall\ x \in D \cap U$. Если речь идет о максимуме или минимуме, то пишем $\operatorname{locextr} P$.

В связи с каждой экстремальной задачей возникают вопросы: каковы необходимые условия экстремума, каковы достаточные условия, существует ли решение задачи, как найти решение явно или численно.

В теории экстремальных задач наиболее разработаны необходимые условия, которым должно удовлетворять решение задачи. Выписывая эти необходимые условия экстремума, мы находим некоторое множество точек, удовлетворяющее этим условиям. Это множество точек (мы называем их *стационарными*, или *критическими*, или *экстремальными*), возможно, шире, чем множество абсолютных и даже локальных экстремумов. Поэтому далее надо с каждой такой точкой разобраться, доставляет она экстремум (и какой) или нет. Это делается с помощью достаточных условий.

Одним из важнейших принципов решения задач с ограничениями является *принцип Лагранжа снятия ограничений*. Ниже он будет сформулирован и доказан для некоторых конкретных типов задач. Сфера применимости принципа Лагранжа достаточно широка. Иногда нельзя к задаче применить имеющуюся теорему, однако этот принцип, примененный без обоснования, тем не менее может привести к точкам, среди которых можно выделить решение.

Глава 1

Экстремальные задачи

§ 1. Конечномерные задачи без ограничений

В этом параграфе даются необходимые и достаточные условия экстремума функций одной и нескольких переменных.

1.1. Постановка задачи

Пусть $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ — функция n действительных переменных, обладающая некоторой гладкостью. Под гладкостью мы понимаем определенную дифференцируемость функции. Если функция f дифференцируема k раз в точке $\hat{x}$, мы пишем $f \in D^k(\hat{x})$. *Гладкой конечномерной экстремальной задачей без ограничений* называется следующая задача:

$$f(x) \to \mathrm{extr}.$$

При решении задачи надо найти отыскать не только абсолютные (глобальные) экстремумы (минимумы и максимумы) функции, но и локальные экстремумы.

Точка $\hat{x}$ является *точкой локального минимума* (максимума) функции f, если существует окрестность $U_\varepsilon = \{x \mid |x - \hat{x}| < \varepsilon\}$ точки $\hat{x}$ такая, что $f(x) \geqslant f(\hat{x})$ ($f(x) \leqslant f(\hat{x})$) для любой точки x из этой окрестности. При этом мы пишем $\hat{x} \in \mathrm{locmin}\, f$ ($\hat{x} \in \mathrm{locmax}\, f$), а если речь идет о минимуме или максимуме, то пишем $\hat{x} \in \mathrm{locextr}\, f$.

1.2. Необходимые и достаточные условия экстремума

1.2.1. Функции одной переменной

Теорема 1 (Ферма). *Пусть $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ — функция одного действительного переменного. Если $\hat{x} \in \mathrm{locextr}\, f$ — точка локального экстремума функции f и $f \in D(\hat{x})$ дифференцируема в точке $\hat{x}$, то*

$$f'(\hat{x}) = 0.$$

Доказательство. По определению дифференцируемости $f(\hat{x} + h) = f(\hat{x}) + f'(\hat{x})h + r(h)$, $r(h) = o(h) = o(1)h$ при малых h. Значит, $f(\hat{x} + h) - f(\hat{x}) = \big(f'(\hat{x}) + o(1)\big)h$.

Если бы $f'(\hat{x}) \neq 0$, то при h достаточно близких к нулю, величина $f'(\hat{x}) + o(1)$ имела бы знак $f'(\hat{x})$, поскольку $o(1) \to 0$ при $h \to 0$. Само же h может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Следовательно, разность $f(\hat{x} + h) - f(\hat{x})$ может быть как меньше, так и больше нуля. Это противоречит тому, что $f(\hat{x} + h) - f(\hat{x}) \geqslant 0$ при $\hat{x} \in \mathrm{locmin}\, f$ и $f(\hat{x} + h) - f(\hat{x}) \leqslant 0$ при $\hat{x} \in \mathrm{locmax}\, f$. ■

Геометрически теорема Ферма утверждает, что в точке экстремума дифференцируемой функции касательная к ее графику горизонтальна.

Теорема 2. *Пусть функция $f \in D^2(\hat{x})$ дважды дифференцируема в точке $\hat{x}$.*

Необходимые условия экстремума: *если $\hat{x} \in \mathrm{locmin}\, f$ — точка локального минимума функции f, то*

$$f'(\hat{x}) = 0, \qquad f''(\hat{x}) \geqslant 0.$$

Достаточные условия экстремума: *если*

$$f'(\hat{x}) = 0, \qquad f''(\hat{x}) > 0,$$

то $\hat{x} \in \mathrm{locmin}\, f$ — точка локального минимума функции f.

Доказательство. По формуле Тейлора

$$f(\hat{x} + h) = f(\hat{x}) + f'(\hat{x})h + \frac{1}{2} f''(\hat{x})h^2 + r(h), \quad r(h) = o(h^2).$$

Необходимость. Пусть $\hat{x} \in \mathrm{locmin}\, f$. Тогда, во-первых, по необходимому условию экстремума I порядка для функций одной переменной — теореме Ферма — $f'(\hat{x}) = 0$, во-вторых, $f(\hat{x} + h) - f(\hat{x}) \geqslant 0$ при достаточно малых h. Поэтому в силу формулы Тейлора

$$f(\hat{x} + h) - f(\hat{x}) = \frac{1}{2} f''(\hat{x})h^2 + r(h) \geqslant 0 \quad \big(r(h) = o(h^2)\big)$$

при малых h. Разделим обе части последнего неравенства на h^2 и устремим h к нулю. Поскольку $\dfrac{r(h)}{h^2} \to 0$, то получим, что $f''(\hat{x}) \geqslant 0$.

Достаточность. Пусть $f'(\hat{x}) = 0$, $f''(\hat{x}) > 0$. Тогда по формуле Тейлора в силу условия $r(h) = o(h^2) \Leftrightarrow |r(h)| \leqslant \varepsilon h^2 \Rightarrow r(h) \geqslant -\varepsilon h^2$ для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно малых h имеем:

$$f(\hat{x} + h) - f(\hat{x}) = \frac{1}{2} f''(\hat{x})h^2 + r(h) \geqslant \left(\frac{f''(\hat{x})}{2} - \varepsilon\right)h^2 \geqslant 0$$

при $\varepsilon \leqslant \dfrac{f''(\hat{x})}{2}$. Следовательно, $\hat{x} \in \mathrm{locmin}\, f$. ■

Для локального максимума неравенства имеют противоположный вид: $f''(\hat{x}) \leqslant 0$ и $f''(\hat{x}) < 0$ соответственно.

В одномерном случае можно дать почти исчерпывающий ответ на вопрос о том, является ли данная точка $\hat{x}$ локальным экстремумом или нет.

Теорема 3. *Пусть функция $f \in D^n(\hat{x})$ n раз дифференцируема в точке $\hat{x}$.*

Необходимые условия экстремума: *если $\hat{x} \in \operatorname{locmin}(\max) f$ — точка локального минимума (максимума) функции f, то либо $f'(\hat{x}) = \ldots = f^{(n)}(\hat{x}) = 0$, либо*

$$f'(\hat{x}) = \ldots = f^{(2m-1)}(\hat{x}) = 0, \quad f^{(2m)}(\hat{x}) > 0 \quad (f^{(2m)}(\hat{x}) < 0) \qquad (1)$$

при некотором $m: \ 2 \leqslant 2m \leqslant n$.

Достаточные условия экстремума: *если выполняется условие* (1), *то $\hat{x} \in \operatorname{locmin}(\max) f$ — точка локального минимума (максимума) функции f.*

Доказательство. Пусть для определенности $\hat{x} \in \operatorname{locmin} f$. По формуле Тейлора

$$f(\hat{x}+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\hat{x})}{k!} h^k + r(h), \quad r(h) = o(h^n) \quad \left(\frac{r(h)}{h^n} \to 0 \quad \text{при } h \to 0\right).$$

Необходимость при $n = 1$ следует из теоремы Ферма. Пусть далее $n > 1$. Тогда либо $f'(\hat{x}) = \ldots = f^{(n)}(\hat{x}) = 0$, либо $f'(\hat{x}) = \ldots = f^{(l-1)}(\hat{x}) = 0$, $f^{(l)}(\hat{x}) \neq 0$, $l \leqslant n$. Значит,

$$f(\hat{x}+h) - f(\hat{x}) = \sum_{k=l}^{n} \frac{f^{(k)}(\hat{x})}{k!} h^k + r(h) = \frac{f^{(l)}(\hat{x})}{l!} h^l + r_1(h), \quad r_1(h) = o(h^l).$$

Поскольку $\hat{x} \in \operatorname{locmin} f$, то $f(\hat{x}+h) - f(\hat{x}) = \dfrac{f^{(l)}(\hat{x})}{l!} h^l + r_1(h) \geqslant 0$ при достаточно малых по модулю h. Так как $f^{(l)}(\hat{x}) \neq 0$, то отсюда следует, что l — четно и $f^{(l)}(\hat{x}) > 0$.

Достаточность. Пусть $f'(\hat{x}) = \ldots = f^{(2m-1)}(\hat{x}) = 0$, $f^{2m}(\hat{x}) \neq 0$. Тогда по формуле Тейлора

$$f(\hat{x}+h) - f(\hat{x}) = \frac{f^{(2m)}(\hat{x})}{(2m)!} h^{2m} + r_2(h), \quad \frac{r_2(h)}{h^{2m}} \to 0 \quad \text{при } h \to 0.$$

Поскольку $f^{(2m)}(\hat{x}) > 0$, то $f(\hat{x}+h) - f(\hat{x}) \geqslant 0$ при достаточно малых h, т. е. $\hat{x} \in \operatorname{locmin} f$. ■

1.2.2. Функции нескольких переменных

Сформулируем необходимое условие экстремума I порядка в конечномерной задаче без ограничений, являющееся аналогом теоремы Ферма.

Теорема 1. *Если $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n) \in \operatorname{locextr} f$ — точка локального экстремума функции n переменных $f(x_1, \ldots, x_n)$ и функция $f \in D(\hat{x})$ дифференцируема в точке $\hat{x}$, то*

$$f'(\hat{x}) = 0 \iff \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_n} = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию одной переменной $\varphi(x_i) = f(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{i-1}, x_i, \hat{x}_{i+1}, \ldots, \hat{x}_n)$. Поскольку $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n) \in \operatorname{locextr} f$, то $\hat{x}_i \in \operatorname{locextr} \varphi$. Кроме того $\varphi \in D(\hat{x}_i)$. По необходимому условию экстремума для функций одной переменной — теореме Ферма

$$\varphi'(\hat{x}_i) = 0 \iff \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_i} = 0.$$

■

Сформулируем необходимые и достаточные условие экстремума II порядка в конечномерной задаче без ограничений. Предварительно напомним, что второй производной функции нескольких переменных является симметричная матрица вторых производных

$$A = f''(\hat{x}) = \left(\frac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n},$$

а также приведем определения знакоопределенностей симметричных матриц. Матрица A называется *неотрицательно определенной* ($A \geqslant 0$), если

$$\langle Ah, h\rangle \geqslant 0 \ \forall\, h \in \mathbf{R}^n \iff \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j \geqslant 0 \quad \forall\, h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbf{R}^n.$$

Матрица A называется *положительно определенной* ($A > 0$), если

$$\langle Ah, h\rangle > 0 \quad \forall\, h \in \mathbf{R}^n, \quad h \neq 0.$$

Матрица A называется *строго положительно определенной*, если существует $\alpha > 0$ такое, что

$$\langle Ah, h\rangle > \alpha \|h\|^2 \quad \forall\, h \in \mathbf{R}^n.$$

Аналогично определяются неположительная и отрицательная матрицы.

Отметим, что в конечномерном пространстве условие положительной определенности симметричной матрицы A эквивалентно условию строгой положительности матрицы A. В бесконечномерных пространствах это не так (см. [АТФ, с. 242]).

Теорема 2. *Пусть функция $f \in D^2(\hat{x})$ дважды дифференцируема в точке $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$.*

Необходимые условия экстремума: *если $\hat{x} \in \operatorname{locmin}(\max) f$ — точка локального минимума (максимума) функции f, то*

$$f'(\hat{x}) = 0, \quad \langle f''(\hat{x})h, h\rangle \geqslant 0 \quad (\langle f''(\hat{x})h, h\rangle \leqslant 0) \quad \forall\, h \in \mathbf{R}^n.$$

Достаточные условия экстремума: *если*

$$f'(\hat{x}) = 0, \quad \langle f''(\hat{x})h, h\rangle > 0 \quad (\langle f''(\hat{x})h, h\rangle > 0) \quad \forall\, h \in \mathbf{R}^n, \quad h \neq 0,$$

то $\hat{x} \in \operatorname{locmin}(\max) f$ — точка локального минимума (максимума) функции f.

Доказательство. По формуле Тейлора

$$f(\hat{x} + h) = f(\hat{x}) + \langle f'(\hat{x}), h\rangle + \frac{1}{2}\langle f''(\hat{x})h, h\rangle + r(h), \quad r(h) = o(|h|^2).$$

Докажем теорему для случая минимума. Случай максимума аналогичен.

Необходимость. Поскольку $\hat{x} \in \operatorname{locmin} f$, то, во-первых, по необходимому условию экстремума I порядка в конечномерной задаче без ограничений — аналогу теоремы Ферма $f'(\hat{x}) = 0$, во-вторых, $f(\hat{x} + \lambda h) - f(\hat{x}) \geqslant 0$ при достаточно малых λ. Поэтому в силу формулы Тейлора

$$f(\hat{x} + \lambda h) - f(\hat{x}) = \frac{\lambda^2}{2}\langle f''(\hat{x})h, h\rangle + r(\lambda h) \geqslant 0 \quad \left(r(\lambda h) = o(|\lambda|^2)\right)$$

при малых λ и фиксированном h. Разделим обе части последнего неравенства на λ^2 и устремим λ к нулю. Поскольку $r(\lambda h)/\lambda^2 \to 0$, то получим, что

$$\langle f''(\hat{x})h, h\rangle \geqslant 0 \quad \forall\, h \in \mathbf{R}^n.$$

Достаточность. Так как $f'(\hat{x}) = 0$, то по формуле Тейлора в силу выполненного условия $\langle f''(\hat{x})h, h\rangle \geqslant \alpha |h|^2$ имеем:

$$f(\hat{x} + h) - f(\hat{x}) = \frac{1}{2}\langle f''(\hat{x})h, h\rangle + r(h) \geqslant \frac{\alpha}{2}|h|^2 + r(h) \geqslant 0$$

при достаточно малых h, так как $r(h) = o(|h|^2)$. Следовательно, $\hat{x} \in \operatorname{locmin} f$. ■

Замечание. Для квадратичных функционалов $Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ условие положительной (отрицательной) определенности матрицы $A = f''(\hat{x}) = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ является достаточным условием абсолютного минимума (максимума) функционала.

1.2.3. Критерий Сильвестра

Знакоопределенность матрицы устанавливается с помощью критерия Сильвестра.

Напомним, что *последовательными главными минорами* матрицы A называются определители $A_{1\ldots k} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ . & \ldots & . \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk}\end{pmatrix}$.

Главным минором $A_{i_1\ldots i_k}$ матрицы A называется определитель матрицы размера $k \times k$, составленной из строк и столбцов с номерами $i_1, \ldots, i_k$: $A_{i_1\ldots i_k} := \det\begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} & \ldots & a_{i_1 i_k} \\ . & \ldots & . \\ a_{i_k i_1} & \ldots & a_{i_k i_k}\end{pmatrix}$.

Теорема. [9, с. 260]. *Пусть A — симметричная матрица. Тогда*

1. *Матрица A положительно определена ($A > 0$) тогда и только тогда, когда все ее последовательные главные миноры положительны, т. е. $A_{1\ldots k} > 0$, $k = 1, \ldots, n$.*
2. *Матрица A отрицательно определена ($A < 0$) тогда и только тогда, когда все ее последовательные главные миноры чередуют знак, начиная с отрицательного, т. е. $(-1)^k \det A_{1\ldots k} > 0$, $k = 1, \ldots, n$.*
3. *Матрица A неотрицательно определена ($A \geqslant 0$) тогда и только тогда, когда все ее главные миноры неотрицательны, т. е. $A_{i_1\ldots i_k} \geqslant 0$, $1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_k \leqslant n$, $k = 1, \ldots, n$.*
4. *Матрица A неположительно определена ($A \leqslant 0$) тогда и только тогда, когда все ее главные миноры чередуют знак, начиная с неположительного, т. е. $(-1)^k A_{i_1\ldots i_k} \geqslant 0$, $1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_k \leqslant n$, $k = 1, \ldots, n$.*

Замечание 1. Как будет показано ниже, положительность (неотрицательность) матрицы равносильна положительности (неотрицательности) всех собственных значений матрицы.

Замечание 2. Отметим, что условие положительности последовательных главных миноров матрицы равносильно условию положительности всех главных миноров (см. [9, с. 260]). Для условия неотрицательности это не так, т. е. из условия неотрицательности последовательных главных миноров не следует неотрицательность всех главных миноров матрицы и, следовательно, не следует неотрицательность матрицы.

Действительно, у матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ последовательные главные миноры равны нулю ($A_1 = A_{12} = 0$), но она не является неотрицательной: $\langle Ah, h\rangle = \langle(0, -h_2), (h_1, h_2)\rangle = -h_2^2 < 0$ при $h_2 \neq 0$.

1.2.4. Метод Ньютона (метод касательных)

Для того, чтобы решить задачу без ограничений нужно найти стационарные точки — решения уравнения $f'(x) = 0$. Для решения таких уравнений численным способом можно воспользоваться замечательным приемом, восходящим к Ньютону. Итак, пусть нам требуется решить уравнение

$$F(x) = 0. \tag{1}$$

Здесь F — дважды непрерывно дифференцируемая функция одной переменной. Будем искать решение уравнения (1) методом последовательных приближений. Если x_k — приближенное значение корня, то точное значение корня

$$\hat{x} = x_k + h_k, \tag{2}$$

где h_k мало, и в силу дифференцируемости функции F

$$0 = F(\hat{x}) = F(x_k + h_k) = F(x_k) + F'(x_k)h_k + o(h_k).$$

Пренебрегая слагаемым $o(h_k)$, находим, что $h_k = -F(x_k)/F'(x_k)$. Внеся эту поправку в формулу (2), получим новое уточненное приближенное значение корня:

$$x_{k+1} = x_k + h_k.$$

Таким образом, мы имеем следующее рекуррентное соотношение для нахождения последовательных приближений к нулю уравнения (1):

$$x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)}. \tag{3}$$

Геометрически метод Ньютона эквивалентен замене дуги кривой $y = F(x)$ касательной, проведенной в некоторой точке кривой (см. рис. 1).

Пусть для определенности нам надо найти корень уравнения (1), находящийся на отрезке $[a, b]$ и $F(b)F''(b) > 0$. Положим $x_0 = b$. Проведем касательную к кривой $y = F(x)$ в точке $\big(b, F(b)\big) = \big(x_0, F(x_0)\big)$.

В качестве первого приближения x_1 берется абсцисса точки пересечения этой касательной с осью Ox. Через точку $\big(x_1, F(x_1)\big)$ снова проводим касательную, абсцисса точки пересечения которой дает второе приближение x_2 корня $\hat{x}$ и т. д. (рис. 1).

Очевидно, что уравнение касательной в точке $\big(x_k, F(x_k)\big)$ есть

$$y = F(x_k) + F'(x_k)(x - x_k).$$

Полагая в этом уравнении $y = 0$, $x = x_{k+1}$, имеем формулу (3)

$$0 = F(x_k) + F'(x_k)(x_{k+1} - x_k) \iff x_{k+1} = x_k - F(x_k)/F'(x_k).$$

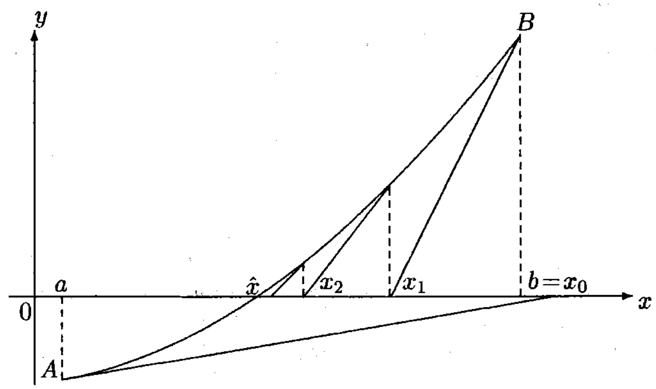


Рис. 1.

Заметим, что если в нашем случае положить $x_0 = a$ и, следовательно, $F(x_0)F''(x_0) < 0$, то, проведя касательную к кривой $y = F(x)$ в точке $\big(a, F(a)\big)$, мы получили бы точку x_1, лежащую вне отрезка $[a, b]$, т. е. при этом выбор начального значения в методе Ньютона оказался бы неудачным. Таким образом, в данном случае правильным начальным приближением $\hat{x}$ является условие $F(x_0)F''(x_0) > 0$.

Имеет место следующая

Теорема. *Пусть $F \in C^2\big([a, b], \mathbf{R}\big)$, значения функции $F(a)$ и $F(b)$ принимают разные знаки $\big(F(a)F(b) < 0\big)$, функция F монотонна на отрезке $[a, b]$, $F'(x)F''(x) \neq 0\ \forall\ x \in [a, b]$. Тогда, исходя из начального приближения $x_0 \in [a, b]$, удовлетворяющего неравенству $F(x_0)F''(x_0) > 0$, можно вычислить по методу Ньютона единственный корень уравнения $F(x) = 0$ с любой степенью точности.*

Если производная $F'(x)$ мало меняется на отрезке $[a, b]$ или вычисление $F'(x_k)$ слишком трудоемко, то в формуле (3) можно положить $F'(x_k) = F'(x_0)$ для всех значений $k = 0, 1, 2, \dots$:

$$x_{k+1} = x_k - F(x_k)/F'(x_0).$$

Такой метод нахождения корня уравнения называется *модифицированным методом Ньютона*. Геометрически этот способ означает, что мы заменяем касательные в точках $\big(x_k, F(x_k)\big)$ прямыми параллельными первой касательной, построенной в точке $\big(x_0, F(x_0)\big)$.

Подробнее о методе Ньютона можно прочитать в книге «Основы вычислительной математики» Б. П. Демидович и И. А. Марон [10].

1.3. Правило решения

Для решения конечномерной задачи без ограничений следует:

1) Выписать необходимое условие экстремума I порядка — аналог теоремы Ферма:

$$f'(x) = 0 \iff \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} = 0.$$

Найти точки $\hat{x}$, удовлетворяющие необходимому условию I порядка (эти точки называются *стационарными*).

2) Проверить выполнение условий экстремума II порядка в каждой стационарной точке.

Выписать матрицу вторых производных

$$A = f''(\hat{x}) = \left(\frac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}.$$

a) Проверить выполнение достаточных условий экстремума — исследовать ее знакоопределенность, т. е. посчитать последовательные главные миноры матрицы A:

$$A_{1\ldots k} = \det\left((a_{ij})_{i,j=1}^{k}\right), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Если все ее они положительны, т. е. $A_{1\ldots k} > 0$, $k = 1, \ldots, n$, то точка $\hat{x}$ доставляет локальный минимум в задаче, $\hat{x} \in \operatorname{locmin} f$.

Если все ее последовательные главные миноры чередуют знак, начиная с отрицательного, т. е. $(-1)^k \det A_{1\ldots k} > 0$, $k = 1, \ldots, n$, то точка доставляет локальный максимум, $\hat{x} \in \operatorname{locmax} f$.

b) Если не выполняются достаточные условия экстремума, то надо проверить выполнение необходимых условий — исследовать ее слабую знакоопределенность, т. е. посчитать главные миноры матрицы A — определители матриц размера $k \times k$, составленных из строк и столбцов с номерами $i_1, \ldots, i_k$: $A_{i_1\ldots i_k} := \det \begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} & \ldots & a_{i_1 i_k} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{i_k i_1} & \ldots & a_{i_k i_k} \end{pmatrix}$.

Если матрица A не является неотрицательно определенной ($A \ngeqslant 0$), т. е. не выполняется условие, когда все ее главные миноры неотрицательны, т. е. $A_{i_1\ldots i_k} \geqslant 0$, $1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_k \leqslant n$, $k = 1, \ldots, n$, то точка $\hat{x}$ не доставляет локальный минимум, $\hat{x} \notin \operatorname{locmin} f$.

Если матрица A не является неположительно определенной ($A \nleqslant 0$), т. е. не выполняется условие, когда все ее главные миноры чередуют знак, начиная с неположительного, т. е. $(-1)^k A_{i_1\ldots i_k} \geqslant 0$, $1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_k \leqslant n$, $k = 1, \ldots, n$, то точка $\hat{x}$ не доставляет локальный максимум, $\hat{x} \notin \operatorname{locmax} f$.

1.4. Примеры

Пример 1. $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 - 2x_1 + x_2 \to \operatorname{extr}$.
Необходимое условие экстремума I порядка:

$$f'(\hat{x}) = 0 \iff \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_1} = \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_2} = 0 \iff \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2 = 0; \\ -x_1 + 2x_2 + 1 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим единственную стационарную точку $\hat{x} = (1, 0)$. Матрица вторых производных $\left(\frac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^{2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ по критерию Сильвестра положительно определена. По достаточному условию локального экстремума функции нескольких переменных точка $(1, 0) \in \operatorname{locmin} f$. Поскольку функционал является квадратичным, то $(1, 0) \in \operatorname{absmin} f$, а $S_{\max} = +\infty$.

Пример 2. $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - x_1^2 - 2x_1 x_2 - x_2^2 \to \operatorname{extr}$.
Необходимое условие экстремума I порядка:

$$f'(\hat{x}) = 0 \iff \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_1} = \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_2} = 0 \iff \begin{cases} 4x_1^3 - 2x_1 - 2x_2 = 0; \\ 4x_2^3 - 2x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим стационарные точки $\hat{x}^1 = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (1, 1)$, $\hat{x}^2 = (-1, -1)$, $\hat{x}^3 = (0, 0)$. Для проверки условий II порядка выписываем матрицу вторых производных:

$$A = \left(\frac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^{2} = \begin{pmatrix} 12\hat{x}_1^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12\hat{x}_2^2 - 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A\Big|_{(1,1)} = A\Big|_{(-1,-1)} = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}, \quad A\Big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$ по критерию Сильвестра положительно определена. По достаточному условию локального экстремума функции нескольких переменных точки $(1, 1)$ и $(-1, -1)$ доставляют локальный минимум функции f.

Матрица $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ по критерию Сильвестра не является ни положительно, ни отрицательно определенной. Она является неположительно определенной матрицей ($A \leqslant 0$) и не является неотрицательно определенной матрицей ($A \ngeqslant 0$). Следовательно, не выполняется необходимое условие локального минимума. Поэтому $\hat{x}^3 = (0, 0) \notin \operatorname{locmin} f$. Поскольку $f(h, -h) = 2h^4 > 0 = f(\hat{x}^3)$ при малых $h \neq 0$, то $\hat{x}^3 \notin \operatorname{locmax} f$. Очевидно, что $S_{\max} = +\infty$.

Пример 3. Найти экстремумы неявно заданной функции двух переменных $x_3 = f(x_1, x_2)$, если

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 10 = 0.$$

Решение. Частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial x_3}{\partial x_1}$, и $\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial x_3}{\partial x_2}$ находим из уравнений:

$$\begin{cases} F_{x_1}: = \dfrac{\partial F}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F}{\partial x_3}\cdot\dfrac{\partial x_3}{\partial x_1} = 0, \\ F_{x_2}: = \dfrac{\partial F}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F}{\partial x_3}\cdot\dfrac{\partial x_3}{\partial x_2} = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 - 2 + (2x_3 - 4)\dfrac{\partial x_3}{\partial x_1} = 0, \\ 2x_2 + 2 + (2x_3 - 4)\dfrac{\partial x_3}{\partial x_2} = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Необходимое условие экстремума I порядка:

$$\frac{\partial x_3(\hat{x})}{\partial x_1} = \frac{\partial x_3(\hat{x})}{\partial x_2} = 0 \overset{(*)}{\iff} \begin{cases} 2\hat{x}_1 - 2 = 0, \\ 2\hat{x}_2 + 2 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} \hat{x}_1 = 1, \\ \hat{x}_2 = -1. \end{cases}$$

Подставляя найденную точку $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (1, -1)$ в заданное уравнение $F(x_1, x_2, x_3) = 0$, находим две стационарные точки $\hat{x}^1 = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = (1, -1, -2)$ и $\hat{x}^2 = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = (1, -1, 6)$

Для проверки условий II порядка надо выписать матрицу вторых производных в каждой стационарной точке. Дифференцируя первое уравнение правой части системы уравнений (*) по x_1 и x_2 с учетом условия $\dfrac{\partial x_3}{\partial x_1} = \dfrac{\partial x_3}{\partial x_2} = 0$, имеем

$$2 + (2x_3 - 4)\frac{\partial^2 x_3}{\partial^2 x_1} = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 x_3}{\partial^2 x_1}\right|_{\hat{x}^1} = \frac{1}{4}, \quad \left.\frac{\partial^2 x_3}{\partial^2 x_1}\right|_{\hat{x}^2} = -\frac{1}{4},$$

$$(2x_3 - 4)\frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_{\hat{x}^1} = \left.\frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_{\hat{x}^2} = 0.$$

Аналогично, дифференцируя второе уравнение правой части системы (*) по x_1 и x_2, получим

$$2 + (2x_3 - 4)\frac{\partial^2 x_3}{\partial^2 x_2} = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 x_3}{\partial^2 x_2}\right|_{\hat{x}^1} = \frac{1}{4}, \quad \left.\frac{\partial^2 x_3}{\partial^2 x_2}\right|_{\hat{x}^2} = -\frac{1}{4}.$$

Очевидно, что $\dfrac{\partial^2 x_3}{\partial x_2 \partial x_1} = \dfrac{\partial^2 x_3}{\partial x_1 \partial x_2}$. Таким образом,

$$A = \left(\frac{\partial^2 \hat{x}_3}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^2 \Rightarrow A\Big|_{\hat{x}^1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad A\Big|_{\hat{x}^2} = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

Матрица $A|_{\hat{x}^1}$ по критерию Сильвестра является положительно определенной, а матрица $A|_{\hat{x}^2}$ отрицательно определенной. Поэтому по достаточному условию второго порядка $S_{\text{locmin}} = -2$, $S_{\text{locmax}} = 6$. Можно показать, что это будут не только локальные экстремумы, но и глобальные.

Приведем несколько примеров различных свойств экстремумов в задаче без ограничений.

Пример 4. Абсолютные минимумы и максимумы достигаются в бесконечном числе точек:

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \sin x.$$

Пример 5. Функция ограничена, абсолютный максимум достигается, минимум — нет:

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Пример 6. Функция ограничена, но абсолютные максимум и минимум не достигаются:

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \operatorname{arctg} x.$$

Пример 7. Функция ограничена, имеет стационарные точки, но абсолютные максимум и минимум не достигаются:

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = (\operatorname{arctg} x)^3.$$

Пример 8. Функция ограничена, имеет локальные максимумы и минимумы, но абсолютные максимум и минимум не достигаются:

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \operatorname{arctg} x \cdot \sin x.$$

Пример 9. Ограничение функции, заданной на плоскости, на любую прямую, проходящую через начало координат, имеет в нуле локальный минимум, но вместе с тем начало координат не является точкой локального минимума:

$$f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, \quad f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2^2)(x_1 - 3x_2^2).$$

Действительно, на любой прямой $x_1 = \alpha x_2$, $\alpha \in \mathbf{R}$, функция вида $f(\alpha x_2, x_2) = (\alpha x_2 - x_2^2)(\alpha x_2 - 3x_2^2) = x_2^2(\alpha - x_2)(\alpha - 3x_2) = x_2^2(\alpha^2 - 4\alpha x_2 + 3x_2^2) \geqslant 0 = f(0)$ при малых x_2. Значит, на любой прямой вида $x_1 = \alpha x_2$ функции f имеет локальный минимум в нуле. Аналогично на прямой $x_2 = 0$ функция $f(x_1, 0) = x_1^2$ имеет минимум в нуле. С другой стороны, на параболе $x_1 = 2x_2^2$ функция $f(2x_2^2, x_2) = -x_2^4 < 0$ в любой окрестности нуля. То есть точка $\hat{x} = 0$ не является точкой локального минимума функции f.

Пример 10. Имеется единственный локальный экстремум, не являющийся абсолютным:

$$f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 + 2e^{-x_1^2}.$$

Необходимое условие экстремума I порядка в конечномерной задаче без ограничений:

$$f'(x) = 0 \iff \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 0 \iff \begin{cases} 2x_1 - 4x_1 e^{-x_1^2} = 0; \\ -2x_2 = 0, \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, \ 2e^{-x_1^2} = 1 \Leftrightarrow -x_1^2 = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \Leftrightarrow x_1 = \pm\sqrt{\ln 2}; \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Получаем в задаче три стационарные точки $\hat{x}^1 = (0,0)$, $\hat{x}^2 = (\sqrt{\ln 2}, 0)$, $\hat{x}^3 = (-\sqrt{\ln 2}, 0)$.

Для проверки условий II порядка надо выписать матрицу вторых производных в каждой стационарной точке:

$$A = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^{2} = \begin{pmatrix} 2 - 4e^{-x_1^2} + 8x_1^2 e^{-x_1^2} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A\Big|_{\hat{x}^1=(0,0)} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad A\Big|_{\hat{x}^2} = A\Big|_{\hat{x}^3} = \begin{pmatrix} 4\ln 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Матрица вторых производных $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ по критерию Сильвестра является отрицательно определенной: $A_1 = -2 < 0$, $A_2 = 4 > 0$. Поэтому по достаточному условию второго порядка стационарная точка $\hat{x}^1 \in \operatorname{locmax}$. Очевидно, что $S_{\text{abcmax}} = +\infty$ $(f(x_1, 0) \to +\infty$ при $x_1 \to +\infty)$.

Матрица вторых производных $\begin{pmatrix} 4\ln 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ по критерию Сильвестра не является ни положительно, ни отрицательно определенной и более того не является ни неположительно определенной матрицей ($A \not\leq 0$) и ни неотрицательно определенной матрицей ($A \not\geq 0$). Следовательно, не выполняется необходимое условие ни локального максимума, ни локального минимума. Поэтому стационарные точки $\hat{x}^2$, $\hat{x}^3 \notin \operatorname{locextr} f$.

Очевидно, что $S_{\text{absmax}} = +\infty$. Действительно, функция $f(x_1, 0) = x_1^2 + 2e^{-x_1^2} \to +\infty$ при $x_1 \to +\infty$. Значит, у функции f имеется единственный локальный экстремум в точке $\hat{x} = (0,0)$, не являющийся абсолютным.

Пример 11. Можно ли утверждать, что если функция одной переменной имеет в какой либо точке локальный минимум, то в некоторой достаточно малой окрестности этой точки слева от точки функция убывает, а справа возрастает?

Нет. Контрпример: $f(x) = \begin{cases} x^2\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Ясно, что $\hat{x} = 0 \in \operatorname{absmin} f$. С другой стороны, в любой окрестности нуля и справа, и слева производная $f'(x) = 2x\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right) - \cos\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, принимает как положительные, так и отрицательные значения, т.е. функция f и возрастает, и убывает.

Пример 12. Имеется бесконечное число локальных максимумов, но нет ни одного локального минимума:

$$f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, \quad f(x_1, x_2) = \sin x_2 - x_1^2.$$

Необходимое условие экстремума I порядка:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 0 \iff \begin{cases} -2x_1 = 0; \\ \cos x_2 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 0; \\ x_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Стационарные точки $\hat{x}^k = (0, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Для проверки условий II порядка надо выписать матрицу вторых производных в каждой стационарной точке:

$$A = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^{2} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\sin x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A\Big|_{(0,\frac{\pi}{2}+2n\pi)} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A\Big|_{(0,\frac{\pi}{2}+(2n+1)\pi)} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ по критерию Сильвестра является отрицательно определенной: $A_1 = -2 < 0$, $A_2 = 2 > 0$. Поэтому по достаточному условию второго порядка $\left(0, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \in \operatorname{locmax} f \ \forall\, n \in \mathbf{Z}$.

Матрица $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ по критерию Сильвестра не является неотрицательно определенной матрицей ($A \not\geq 0$). Следовательно, не выполняется необходимое условие локального минимума. Поэтому точки $\left(0, \frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi\right)$ не доставляют локального минимума. Точки локального минимума могли быть только среди стационарных точек, но там их не оказалось. Следовательно, нет ни одного локального минимума.

1.5. Задачи, упражнения

В задачах 1.1–1.17 без ограничений найти стационарные точки, проверить их на экстремальность, а также найти все локальные и глобальные минимумы и максимумы.

1.1. $f(x_1,x_2) = x_1x_2 + \dfrac{50}{x_1} + \dfrac{20}{x_2} \to \text{extr}.$

1.2. $f(x_1,x_2) = x_1^2 - x_2^2 - 4x_1 + 6x_2 \to \text{extr}.$

1.3. $f(x_1,x_2) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 - 16x_1 - 12x_2 \to \text{extr}.$

1.4. $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 + x_1 - 2x_3 \to \text{extr}.$

1.5. $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2x_3 - x_1 \to \text{extr}.$

1.6. $f(x_1,x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2 \to \text{extr}.$

1.7. $f(x_1,x_2) = 3x_1x_2 - x_1^2x_2 - x_1x_2^2 \to \text{extr}.$

1.8. $f(x_1,x_2) = x_1^4 + x_2^4 - (x_1+x_2)^4 \to \text{extr}.$

1.9. $f(x_1,x_2) = 2x_1^4 + x_2^4 - x_1^2 - 2x_2^2 \to \text{extr}.$

1.10. $f(x_1,x_2) = x_1x_2\ln(x_1^2 + x_2^2) \to \text{extr}.$

1.11. $f(x_1,x_2) = x_1^2x_2^3(6 - x_1 - x_2) \to \text{extr}.$

1.12. $f(x_1,x_2) = e^{2x_1+3x_2}(8x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_2^2) \to \text{extr}.$

1.13. $f(x_1,x_2) = e^{x_1^2-x_2}(5 - 2x_1 + x_2) \to \text{extr}.$

1.14. $f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2^2x_3^3(7 - x_1 - 2x_2 - 3x_3) \to \text{extr}.$

1.15. $f(x_1,x_2) = \displaystyle\int_{-1}^{1}(t^2 + x_2t + x_1)^2\,dt \to \min$
(задача о полиномах Лежандра второй степени).

1.16. $f(x_1,x_2,x_3) = \displaystyle\int_{-1}^{1}(t^3 + x_3t^2 + x_2t + x_1)^2\,dt \to \min.$
(задача о полиномах Лежандра третьей степени).

1.17. Найти экстремумы неявно заданной функции двух переменных $x_3 = f(x_1,x_2)$, если

$$F(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_3 - x_2x_3 + 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2 = 0.$$

§ 2. Конечномерные гладкие задачи с равенствами

В этом параграфе даются необходимые и достаточные условия экстремума в гладкой конечномерной задаче с ограничениями типа равенств.

2.1. Постановка задачи

Пусть $f_i\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $i = 0,1,\ldots,m$, — функции n переменных. Считаем, что все функции f_i обладают определенной гладкостью. *Гладкой конечномерной экстремальной задачей с ограничениями типа равенств* называется следующая задача:

$$f_0(x) \to \text{extr};\quad f_i(x) = 0,\quad i = 1,\ldots,m. \qquad (P)$$

2.2. Необходимые и достаточные условия экстремума

2.2.1. Принцип Лагранжа

Сформулируем необходимое условие экстремума I порядка в гладкой конечномерной задаче с ограничениями типа равенств — принцип Лагранжа.

Теорема. *Пусть* $\hat{x} \in \operatorname{locextr} P$ *— точка локального экстремума в задаче* (P), *а функции* f_i, $i = 0,1,\ldots,m$, *непрерывно дифференцируемы в окрестности точки* $\hat{x}$ (условие гладкости). *Тогда существует ненулевой вектор множителей Лагранжа* $\lambda = (\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_m) \in \mathbf{R}^{m+1}$, $\lambda \neq 0$, *такой, что для функции Лагранжа задачи* (P) $\Lambda(x,\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{m}\lambda_if_i(x)$ *выполняется условие стационарности*

$$\Lambda_x(\hat{x},\lambda) = 0 \iff \frac{\partial\Lambda(\hat{x},\lambda)}{\partial x_j} = 0,\quad j = 1,\ldots,n \iff \sum_{i=0}^{m}\lambda_if_i'(\hat{x}) = 0.$$

Это соотношение называется *условием стационарности*. Точки, удовлетворяющие условию стационарности, называются *стационарными*.

Доказательство проведем от противного. Предположим, что условие стационарности не выполняется. Это означает, что векторы $f_i'(\hat{x}) = \left(\dfrac{\partial f_i(\hat{x})}{\partial x_1},\ldots,\dfrac{\partial f_i(\hat{x})}{\partial x_n}\right)$, $i = 0,1,\ldots,m$, линейно независимы. Поэтому ранг матрицы $A = \left(\dfrac{\partial f_i(\hat{x})}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=0,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_0(\hat{x})}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_0(\hat{x})}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_m(\hat{x})}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_m(\hat{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ равен

$m+1$. Тогда по теореме о ранге матрицы (см. [13, с. 71]) существует матрица M порядка $(m+1)\times(m+1)$ с определителем, отличным от нуля. Допустим для определенности, что этой матрицей является матрица, составленная из первых столбцов матрицы A:

$$\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_0(\hat{x})}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_0(\hat{x})}{\partial x_{m+1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_m(\hat{x})}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_m(\hat{x})}{\partial x_{m+1}} \end{pmatrix} = \det M \neq 0.$$

Не ограничивая общности, считаем, что $f_0(\hat{x}) = 0$. Действительно, если $f_0(\hat{x}) \neq 0$, то следует рассмотреть функцию $\widetilde{f}_0(x) = f_0(x) - f_0(\hat{x})$ и для нее будет $\widetilde{f}_0(\hat{x}) = 0$. Положим $F(\bar{x}) = \big(F_0(\bar{x}),\dots,F_m(\bar{x})\big) = \big(f_0(\bar{x},\hat{x}_{m+2},\dots,\hat{x}_n),\dots,f_m(\bar{x},\hat{x}_{m+2},\dots,\hat{x}_n)\big)$ для вектора $\bar{x} = (x_1,\dots,x_{m+1})$. Функция F отображает некоторую окрестность точки $\hat{\bar{x}} = (\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_{m+1}) \in \mathbf{R}^{m+1}$ в $\mathbf{R}^{m+1}$ и является (в силу условий гладкости теоремы) непрерывно дифференцируемым отображением в этой окрестности, $F(\hat{\bar{x}}) = 0$. Кроме того, якобиан отображения F в точке $\hat{x}$ отличен от нуля, т. е.

$$\det\left(\frac{\partial F_i(\hat{\bar{x}})}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=0,1,\dots,m\\ j=1,\dots,m+1}} = \det M \neq 0.$$

По теореме об обратной функции в конечномерных пространствах (см. следующий пункт) существует обратное отображение F^{-1} некоторой окрестности точки $\hat{y} = 0$ в окрестность точки $\hat{\bar{x}}$ такое, что $F^{-1}(\hat{y} = 0) = \hat{\bar{x}}$ и $|F^{-1}(y) - |F^{-1}(\hat{y})| \leqslant K|y-\hat{y}| \Leftrightarrow |F^{-1}(y) - \hat{\bar{x}}| \leqslant K|y|$ с некоторой константой $K > 0$. В частности, для достаточно малого по модулю ε определен вектор $\bar{x}(\varepsilon) := F^{-1}(\varepsilon,0,\dots,0)$, для которого $|\bar{x}(\varepsilon) - \hat{\bar{x}}| \leqslant K|\varepsilon|$. Это означает, что $F(\bar{x}(\varepsilon)) = (\varepsilon,0,\dots,0)$, что равносильно равенствам $f_0(\bar{x}(\varepsilon),\hat{x}_{m+2},\dots,\hat{x}_n) = \varepsilon$, $f_i(\bar{x}(\varepsilon),\hat{x}_{m+2},\dots,\hat{x}_n) = 0$, $i = 1,\dots,m$. Таким образом, для вектора $x(\varepsilon) = (x_1(\varepsilon),\dots,x_{m+1}(\varepsilon),\hat{x}_{m+2},\dots,\hat{x}_n)$ выполняются условия

$$f_0(x(\varepsilon)) = \varepsilon, \quad f_i(x(\varepsilon)) = 0,\ i = 1,\dots,m, \tag{1}$$

и при этом

$$|x(\varepsilon) - \hat{x}| \leqslant K|\varepsilon|. \tag{2}$$

Из соотношений (1)–(2) следует, что вектор $\hat{x}$ не доставляет в задаче экстремума, ибо вблизи его существуют допустимые векторы $x(\varepsilon)$, на которых функционал f_0 принимает значения как большие так и меньшие чем $f_0(\hat{x})$ (напомним, что $f_0(\hat{x}) = 0$). Получили противоречие с тем, что $\hat{x} \in \operatorname{locextr} P$. Таким образом, наше предположение (противного) неверно и тем самым теорема доказана. ■

2.2.2. Конечномерная теорема об обратной функции. Теорема Вейерштрасса

Теорема (конечномерная теорема об обратной функции). *Пусть $F\colon U \to \mathbf{R}^n$ — непрерывно дифференцируемое отображение некоторой окрестности $U \subset \mathbf{R}^n$ точки $\hat{x}$ в $\mathbf{R}^n$, $F(\hat{x}) = \hat{y}$ и якобиан отображения F в точке $\hat{x}$ отличен от нуля* $\left(\det F'(\hat{x}) = \det\left(\dfrac{dF_i(\hat{x})}{dx_j}\right)^n_{i,j=1} \neq 0\right)$. *Тогда существует обратное отображение F^{-1} некоторой окрестности V точки $\hat{y}$ в окрестность точки $\hat{x}$ такое, что $F^{-1}(\hat{y}) = \hat{x}$ и*

$$\left|F^{-1}(y) - F^{-1}(\hat{y})\right| \leqslant K|y-\hat{y}| \quad \forall\, y \in V$$

с некоторой константой $K > 0$.

Пусть $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ — функция n переменных. При исследовании вопроса о достижении функцией n переменных экстремума часто используется следующая теорема.

Теорема Вейерштрасса. [16, т. 1, с. 235] *Непрерывная функция на непустом ограниченном замкнутом подмножестве конечномерного пространства (компакте) достигает своих абсолютных максимума и минимума.*

Выделим простое следствие из этой теоремы, которое часто будем использовать.

Следствие. *Если функция f непрерывна на $\mathbf{R}^n$ и $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = +\infty$ $\big(\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = -\infty\big)$, то она достигает своего абсолютного минимума (максимума) на любом замкнутом подмножестве из $\mathbf{R}^n$.*

Напомним, что множество A в метрическом пространстве называется *компактом*, если из всякой последовательности элементов A можно выбрать сходящуюся к элементу из A подпоследовательность или (равносильное определение) если из всякого покрытия A открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие. Ограниченное и замкнутое множество конечномерного пространства является *компактом*.

2.2.3. Необходимое условие экстремума II порядка

Сформулируем необходимое условие минимума II порядка в гладкой конечномерной задаче с ограничениями типа равенств.

Теорема. *Пусть* $\hat{x} \in \operatorname{locmin} P$ *— точка локального минимума в задаче* (P), *функции* f_i, $i = 0, 1, \dots, m$, *дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности точки* $\hat{x}$ (условие гладкости), $\dim \operatorname{lin}^* \{ f_1'(\hat{x}), \dots, f_m'(\hat{x}) \} = n$ (условие регулярности). *Тогда существует множитель Лагранжа* $\lambda = (1, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ *такой, что для функции Лагранжа задачи* (P) $\Lambda(x, \lambda) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$ *выполняются условия стационарности*:

$$\Lambda_x(\hat{x}, \lambda) = 0 \iff f_0'(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i'(\hat{x}) = 0$$

и неотрицательности:

$$\langle \Lambda_{xx}(\hat{x}, \lambda) h, h \rangle \geqslant 0 \quad \forall\, h\colon \langle f_i'(\hat{x}), h \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Мы сформулировали необходимое условие минимума. Необходимое условие максимума формулируется аналогично, за исключением того, что множитель Лагранжа $\lambda = (-1, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ и соответственно функция Лагранжа $\Lambda(x, \lambda) = -f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$.

2.2.4. Достаточное условие экстремума II порядка

Сформулируем достаточное условие минимума II порядка в гладкой конечномерной задаче с ограничениями типа равенств.

Теорема. *Пусть функции* f_i, $i = 0, 1, \dots, m$, *дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности точки* $\hat{x}$ (условие гладкости), $\dim \operatorname{lin} \{ f_1'(\hat{x}), \dots, f_m'(\hat{x}) \} = n$ (условие регулярности). *Существует множитель Лагранжа* $\lambda = (1, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ *такой, что для функции Лагранжа задачи* (P) $\Lambda(x, \lambda) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$ *выполняются условия стационарности*:

$$\Lambda_x(\hat{x}, \lambda) = 0 \iff f_0'(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i'(\hat{x}) = 0$$

и положительности:

$$\langle \Lambda_{xx}(\hat{x}, \lambda) h, h \rangle > 0 \quad \forall\, h \neq 0\colon \langle f_i'(\hat{x}), h \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Тогда $\hat{x} \in \operatorname{locmin} P$ *— точка локального минимума в задаче* (P).

Мы сформулировали достаточное условие минимума. Достаточное условие максимума формулируется аналогично, за исключением того, что множитель Лагранжа $\lambda = (-1, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ и соответственно функция Лагранжа $\Lambda(x, \lambda) = -f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$.

* lin означает «линейная оболочка».

2.3. Правило решения

Для решения гладкой конечномерной задачи с ограничениями типа равенств следует:

1) Составить функцию Лагранжа

$$\Lambda(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x).$$

2) Выписать необходимое условие экстремума I порядка — условие стационарности функции Лагранжа:

$$\Lambda_x(\hat{x}, \lambda) = 0 \iff \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i'(\hat{x}) = 0.$$

3) Найти точки $\hat{x}$, удовлетворяющие условию стационарности (эти точки называются *стационарными*). При этом следует отдельно рассмотреть случаи: a) $\lambda_0 = 0$, b) $\lambda_0 = 1$ (или любой положительной константе), c) $\lambda_0 = -1$ (или любой отрицательной константе). В случае a) стационарные точки могут доставлять и минимум, и максимум в задаче. В случае b) стационарные точки могут доставлять минимум в задаче. В случае c) стационарные точки могут доставлять максимум в задаче.

4) Найти решение среди стационарных точек или доказать, что его нет. При этом можно пытаться воспользоваться непосредственной проверкой или перейти к исследованию условий экстремума II порядка в каждой стационарной точке.

Выписать матрицу вторых производных $\Lambda_{xx}(\hat{x}, \lambda)$ и пространство $L = \{ h \in \mathbb{R}^n \mid \langle f_i'(\hat{x}), h \rangle = 0, \ i = 1, \dots, m \}$.

Проверить выполнение достаточных условий экстремума — положительную определенность матрицы вторых производных:

$$\langle \Lambda_{xx}(\hat{x}, \lambda) h, h \rangle > 0 \quad \forall\, h \in L, \quad h \neq 0.$$

Если это условие положительности выполняется, то точка $\hat{x}$ доставляет в случае b) локальный минимум в задаче ($\hat{x} \in \operatorname{locmin} P$); в случае c) локальный максимум в задаче ($\hat{x} \in \operatorname{locmax} P$).

5) Если не выполняются достаточные условия экстремума, то надо проверить выполнение необходимого условия экстремума — неотрицательную определенность матрицы вторых производных:

$$\langle \Lambda_{xx}(\hat{x}, \lambda) h, h \rangle \geqslant 0 \quad \forall\, h \in L.$$

Если это условие неотрицательности не выполняется, то точка $\hat{x}$ не доставляет в случае b) локальный минимум в задаче ($\hat{x} \notin \operatorname{locmin} P$); в случае c) локальный максимум в задаче ($\hat{x} \notin \operatorname{locmax} P$).

Теорема. *Пусть* $\hat{x} \in \operatorname{locmin} P$ — *точка локального минимума в задаче* (P), *функции* f_i, $i = 0, 1, \ldots, m$, *дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности точки* $\hat{x}$ (условие гладкости), $\dim \operatorname{lin}^*\{f_1'(\hat{x}), \ldots, f_m'(\hat{x})\} = n$ (условие регулярности). *Тогда существует множитель Лагранжа* $\lambda = (1, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ *такой, что для функции Лагранжа задачи* (P) $\Lambda(x, \lambda) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$ *выполняются условия стационарности*:

$$\Lambda_x(\hat{x}, \lambda) = 0 \iff f_0'(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i'(\hat{x}) = 0$$

и неотрицательности:

$$\langle \Lambda_{xx}(\hat{x}, \lambda)h, h \rangle \geqslant 0 \quad \forall\, h\colon \langle f_i'(\hat{x}), h \rangle = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Мы сформулировали необходимое условие минимума. Необходимое условие максимума формулируется аналогично, за исключением того, что множитель Лагранжа $\lambda = (-1, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ и соответственно функция Лагранжа $\Lambda(x, \lambda) = -f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$.

2.2.4. Достаточное условие экстремума II порядка

Сформулируем достаточное условие минимума II порядка в гладкой конечномерной задаче с ограничениями типа равенств.

Теорема. *Пусть функции* f_i, $i = 0, 1, \ldots, m$, *дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности точки* $\hat{x}$ (условие гладкости), $\dim \operatorname{lin}\{f_1'(\hat{x}), \ldots, f_m'(\hat{x})\} = n$ (условие регулярности). *Существует множитель Лагранжа* $\lambda = (1, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ *такой, что для функции Лагранжа задачи* (P) $\Lambda(x, \lambda) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$ *выполняются условия стационарности*:

$$\Lambda_x(\hat{x}, \lambda) = 0 \iff f_0'(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i'(\hat{x}) = 0$$

и положительности:

$$\langle \Lambda_{xx}(\hat{x}, \lambda)h, h \rangle > 0 \quad \forall\, h \neq 0\colon \langle f_i'(\hat{x}), h \rangle = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Тогда $\hat{x} \in \operatorname{locmin} P$ — *точка локального минимума в задаче* (P).

Мы сформулировали достаточное условие минимума. Достаточное условие максимума формулируется аналогично, за исключением того, что множитель Лагранжа $\lambda = (-1, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ и соответственно функция Лагранжа $\Lambda(x, \lambda) = -f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$.

* lin означает «линейная оболочка».

2.3. Правило решения

Для решения гладкой конечномерной задачи с ограничениями типа равенств следует:

1) Составить функцию Лагранжа

$$\Lambda(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x).$$

2) Выписать необходимое условие экстремума I порядка — условие стационарности функции Лагранжа:

$$\Lambda_x(\hat{x}, \lambda) = 0 \iff \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i'(\hat{x}) = 0.$$

3) Найти точки $\hat{x}$, удовлетворяющие условию стационарности (эти точки называются *стационарными*). При этом следует отдельно рассмотреть случаи: a) $\lambda_0 = 0$, b) $\lambda_0 = 1$ (или любой положительной константе), c) $\lambda_0 = -1$ (или любой отрицательной константе). В случае a) стационарные точки могут доставлять и минимум, и максимум в задаче. В случае b) стационарные точки могут доставлять минимум в задаче. В случае c) стационарные точки могут доставлять максимум в задаче.

4) Найти решение среди стационарных точек или доказать, что его нет. При этом можно пытаться воспользоваться непосредственной проверкой или перейти к исследованию условий экстремума II порядка в каждой стационарной точке.

Выписать матрицу вторых производных $\Lambda_{xx}(\hat{x}, \lambda)$ и пространство $L = \{h \in \mathbb{R}^n \mid \langle f_i'(\hat{x}), h \rangle = 0,\ i = 1, \ldots, m\}$.

Проверить выполнение достаточных условий экстремума — положительную определенность матрицы вторых производных:

$$\langle \Lambda_{xx}(\hat{x}, \lambda)h, h \rangle > 0 \quad \forall\, h \in L, \quad h \neq 0.$$

Если это условие положительности выполняется, то точка $\hat{x}$ доставляет в случае b) локальный минимум в задаче ($\hat{x} \in \operatorname{locmin} P$); в случае c) локальный максимум в задаче ($\hat{x} \in \operatorname{locmax} P$).

5) Если не выполняются достаточные условия экстремума, то надо проверить выполнение необходимого условия экстремума — неотрицательную определенность матрицы вторых производных:

$$\langle \Lambda_{xx}(\hat{x}, \lambda)h, h \rangle \geqslant 0 \quad \forall\, h \in L.$$

Если это условие неотрицательности не выполняется, то точка $\hat{x}$ не доставляет в случае b) локальный минимум в задаче ($\hat{x} \notin \operatorname{locmin} P$); в случае c) локальный максимум в задаче ($\hat{x} \notin \operatorname{locmax} P$).

Соотношения $x_i - \xi_i + \lambda\dfrac{x_i}{a_i^2} = 0 \Leftrightarrow \xi_i - x_i = \lambda\dfrac{x_i}{a_i^2}$, $i = 1, 2$, имеют очевидный геометрический смысл: вектор $\xi - x$ пропорционален вектору-градиенту функции f_1 в точке x, т. е. лежит на нормали к эллипсу. Этот факт был впервые установлен Аполлонием. Выведем из полученных нами соотношений уравнение кривой, «разделяющей» те точки ξ, из которых можно провести две нормали, от точек, из которых можно провести четыре нормали. Очевидно, что это разделение происходит для λ, удовлетворяющих соотношению (1), для которых

$$\varphi'(\lambda) = -\frac{2\xi_1^2 a_1^2}{(a_1^2+\lambda)^3} - \frac{2\xi_2^2 a_2^2}{(a_2^2+\lambda)^3} = 0, \quad \lambda \in (-a_1^2, -a_2^2). \tag{2}$$

Обозначим $a_1^2 + \lambda = A(\xi_1 a_1)^{2/3}$, тогда из (2) $a_2^2 + \lambda = -A(\xi_2 a_2)^{2/3}$. Из последних двух соотношений найдем, что $A = \dfrac{a_1^2 - a_2^2}{(\xi_1 a_1)^{2/3} + (\xi_2 a_2)^{2/3}}$. Подставляя $a_1^2 + \lambda$, $a_2^2 + \lambda$ и A в (1), получаем уравнение разделяющей кривой:

$$\frac{\xi_1^2 a_1^2}{A^2(\xi_1 a_1)^{4/3}} + \frac{\xi_2^2 a_2^2}{A^2(\xi_2 a_2)^{4/3}} = 1 \iff (\xi_1 a_1)^{2/3} + (\xi_2 a_2)^{2/3} = A^2 \iff$$

$$(\xi_1 a_1)^{2/3} + (\xi_2 a_2)^{2/3} = \frac{(a_1^2 - a_2^2)^2}{\left((\xi_1 a_1)^{2/3} + (\xi_2 a_2)^{2/3}\right)^2} \iff$$

$$(\xi_1 a_1)^{2/3} + (\xi_2 a_2)^{2/3} = (a_1^2 - a_2^2)^{2/3}.$$

Это уравнение астроиды. Вне астроиды каждая точка имеет две нормали к эллипсу, внутри нее — четыре, на самой астроиде — три (за исключением вершин, где имеются две нормали (рис. 4)).

Докажем, что касательная к астроиде перпендикулярна к эллипсу в точке ее пересечения с эллипсом (рис. 5). Обозначим точку на астроиде через ξ, а точку пересечения касательной с эллипсом через x. Для доказательства утверждения достаточно показать, что нормаль к астроиде в точке ξ перпендикулярна вектору $x - \xi$ перпендикулярному к эллипсу.

Нормалью к астроиде $(\xi_1 a_1)^{2/3} + (\xi_2 a_2)^{2/3} = (a_1^2 - a_2^2)^{2/3}$ в точке ξ является вектор пропорциональный градиенту функции $g(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1 a_1)^{2/3} + (\xi_2 a_2)^{2/3}$, т. е. вектор $n = (\xi_1^{-1/3} a_1^{2/3},\ \xi_2^{-1/3} a_2^{2/3})$. Выше мы доказали, что перпендикуляром к эллипсу является вектор $x - \xi$, где x находится из уравнений: $x_i = \dfrac{\xi_i a_i^2}{a_i^2 + \lambda}$, $i = 1, 2$. Отсюда $x_i - \xi_i = \dfrac{\xi_i a_i^2}{a_i^2 + \lambda} - \xi_i = -\dfrac{\lambda \xi_i}{a_i^2 + \lambda}$, $i = 1, 2$. Поэтому

$$|n| \cdot |x - \xi| \cos\varphi = \langle n, x - \xi \rangle =$$
$$= -\frac{\xi_1^{-1/3} a_1^{2/3} \lambda \xi_1}{a_1^2 + \lambda} - \frac{\xi_2^{-1/3} a_2^{2/3} \lambda \xi_2}{a_2^2 + \lambda} = -\frac{\lambda(\xi_1 a_1)^{2/3}}{a_1^2 + \lambda} - \frac{\lambda(\xi_2 a_2)^{2/3}}{a_2^2 + \lambda}.$$

Подставляя значение $a_i^2 + \lambda$, выраженное через A и $(\xi_i a_i)^{2/3}$, получим

$$|n| \cdot |x - \xi| \cos\varphi = -\frac{\lambda(\xi_1 a_1)^{2/3}}{A(\xi_1 a_1)^{2/3}} - \frac{\lambda(\xi_2 a_2)^{2/3}}{-A(\xi_2 a_2)^{2/3}} = -\frac{\lambda}{A} + \frac{\lambda}{A} = 0.$$

Следовательно, $\cos\varphi = 0$, т. е. вектора n и $x - \xi$ перпендикулярны.

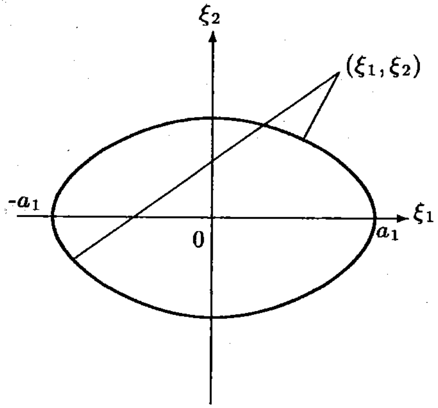


Рис. 2.

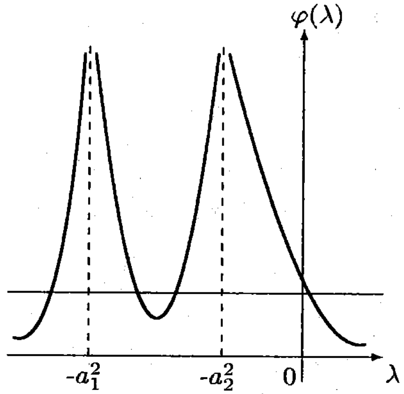


Рис. 3.

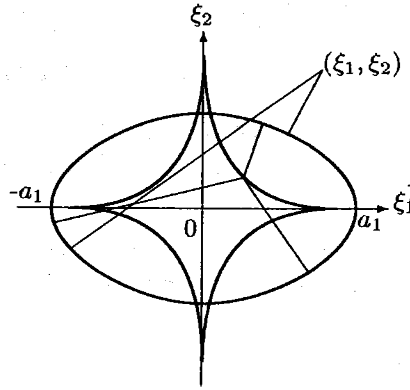


Рис. 4.

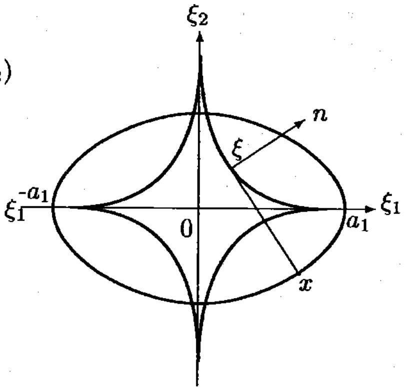


Рис. 5.

2.6. Задачи

2.1. $x_1^2 + x_2^2 \to \text{extr}; \quad 3x_1 + 4x_2 = 1.$

2.2. $e^{x_1x_2} \to \text{extr}; \quad x_1 + x_2 = 1.$

2.3. $x_1 + x_2 \to \text{extr}; \quad 5x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 = 1.$

2.4. $x_1^2 + 12x_1x_2 + 2x_2^2 \to \text{extr}; \quad 4x_1^2 + x_2^2 = 25.$

2.5. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to \text{extr}; \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1.$

2.6. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \text{extr}; \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$

2.7. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to \text{extr}; \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ x_1 + x_2 - x_3 = 1/2.$

2.8. $2x_1^2 - 6x_1 - 6x_2 - 3x_3 \to \text{extr}; \quad x_1 - x_2 + x_3 = 0, \quad 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 1.$

2.9. $x_1 + x_2 + x_3 \to \text{extr}; \quad x_1 + x_2 - x_3 = 1,\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$

2.10. $x_1x_2 + x_2x_3 \to \text{extr}; \quad x_1^2 + x_2^2 = 2,\ x_2 + x_3 = 2.$

2.11. $x_1x_2x_3 \to \text{extr}; \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_1 + x_2 + x_3 = 0.$

2.12. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to \text{extr}; \quad x_1^2 + (x_2 - 3)^2 + (x_3 - 4)^2 = 1.$

2.13. $x_1x_2^2x_3^3 \to \text{extr}; \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1.$

2.14. $x_1x_2^2x_3^3 \to \text{extr}; \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$

2.15. Найти минимум линейной функции $f(x) = \langle a, x\rangle$, $a, x \in \mathbf{R}^n$, на единичном шаре $\langle x, x\rangle = 1$.

2.16. Найти расстояние от точки $\hat{x} \in \mathbf{R}^n$ до гиперплоскости $\langle a, x\rangle = b$, $a \in \mathbf{R}^n$, $b \in \mathbf{R}$.

2.17. Найти расстояние от точки $\hat{x} \in \mathbf{R}^n$ до прямой $x = at + b$, $a, b \in \mathbf{R}^n$.

2.18. Найти максимальную площадь прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат, вписанного в эллипс $\dfrac{x_1^2}{a_1^2} + \dfrac{x_2^2}{a_2^2} = 1$.

2.19. Найти максимальный объем прямоугольного параллелепипеда со сторонами, параллельными осям координат, вписанного в эллипсоид $\dfrac{x_1^2}{a_1^2} + \dfrac{x_2^2}{a_2^2} + \dfrac{x_3^2}{a_3^2} = 1$.

2.20. Решить задачу Аполлония для параболы.

2.21. Решить задачу Аполлония для гиперболы.

§ 3. Конечномерные гладкие задачи с равенствами и неравенствами

В этом параграфе даются необходимые и достаточные условия экстремума в гладкой конечномерной задаче с ограничениями типа равенств и неравенств.

3.1. Постановка задачи

Пусть $f_i\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, — функции n переменных, отображающие пространство $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}$. Считаем, что все функции f_i обладают определенной гладкостью. *Гладкой конечномерной экстремальной задачей с ограничениями типа равенств и неравенств* называется следующая задача в $\mathbf{R}^n$:

$$f_0(x) \to \min; \quad f_i(x) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m', \\ f_i(x) = 0, \quad i = m' + 1, \ldots, m. \qquad (P)$$

В задачах, где имеются ограничения типа неравенств, важно, рассматриваемая задача на минимум или максимум. Для определенности мы будем рассматривать задачи на минимум.

3.2. Необходимые и достаточные условия экстремума

3.2.1. Принцип Лагранжа

Сформулируем необходимое условие экстремума I порядка в гладкой конечномерной задаче с ограничениями типа равенств и неравенств — принцип Лагранжа.

Теорема. *Пусть* $\hat{x} \in \operatorname{locextr} P$ *— точка локального экстремума в задаче* (P), *а функции* f_i, $i = 0, 1, \ldots, m$, *непрерывно дифференцируемы в окрестности точки* $\hat{x}$ (условие гладкости). *Тогда существует ненулевой вектор множителей Лагранжа* $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbf{R}^{m+1}$, $\lambda \neq 0$, *такой, что для функции Лагранжа задачи* (P) $\Lambda(x, \lambda) = \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x)$ *выполняются условия*:

a) *стационарности*:

$$\Lambda_x(\hat{x}, \lambda) = 0 \iff \frac{\partial \Lambda(\hat{x}, \lambda)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n \iff \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i'(\hat{x}) = 0;$$

b) *дополняющей нежесткости*: $\lambda_i f_i(\hat{x}) = 0$, $i = 1, \ldots, m'$;

c) *неотрицательности*: $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 0, 1, \ldots, m'$.

Доказательство этой теоремы в более общем случае см. [АГТ, с. 51].

Точки, удовлетворяющие необходимым условиям локального экстремума, называются *критическими*. В задаче на максимум $\lambda_0 \leqslant 0$.

3.2.2. Необходимое условие экстремума II порядка

Сформулируем необходимое условие минимума II порядка в гладкой конечномерной задаче с ограничениями типа равенств и неравенств.

Теорема. *Пусть* $\hat{x} \in \operatorname{locmin} P$ — *точка локального минимума в задаче* (P), *функции* f_i, $i = 0, \ldots, m$, *дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки* $\hat{x}$ (условие гладкости), *векторы* $f'_{m+1}(\hat{x}), \ldots, f_m(\hat{x})$ — *линейно независимы* (условие регулярности).

Тогда существует множитель Лагранжа $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ *с* $\lambda_0 = 1$ *такой, что для функции Лагранжа задачи* (P)

$$\Lambda(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x)$$

выполняются условия экстремума I порядка:

a) *стационарности:*

$$\Lambda_x(\hat{x}, \lambda) = 0 \iff \frac{\partial \Lambda(\hat{x}, \lambda)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n \iff \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f'_i(\hat{x}) = 0;$$

b) *дополняющей нежесткости:*

$$\lambda_i f_i(\hat{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m';$$

c) *неотрицательности:*

$$\lambda_i \geqslant 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m';$$

и

$$\langle \Lambda_{xx}(\hat{x}, \lambda)h, h \rangle \geqslant 0 \quad \forall\, h \in K, \quad \forall\, \lambda \in Л,$$

где $K := \{h \in \mathbb{R}^n \mid \langle f'_i(\hat{x}), h \rangle \leqslant 0,\ i = 0, 1, \ldots, m',\ f'_i(\hat{x})[h] = 0,\ i = m' + 1, \ldots, m\}$ — *конус допустимых вариаций, а* $Л$ — *совокупность множителей Лагранжа* λ, *для которых выполнены условия* a)–c) *с* $\lambda_0 = 1$.

Доказательство этой теоремы см. [ГТ, с. 124].

Мы сформулировали необходимое условие минимума. Необходимое условие максимума формулируется аналогично, за исключением того, что множитель Лагранжа $\lambda = (-1, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ и соответственно в конусе допустимых вариаций $\langle f'_0(\hat{x}), h \rangle \geqslant 0$.

3.2.3. Достаточное условие экстремума II порядка

Сформулируем достаточное условие минимума II порядка в гладкой конечномерной задаче с ограничениями типа равенств и неравенств.

Теорема. *Пусть функции* f_i, $i = 0, \ldots, m$, *дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки* $\hat{x}$ (условие гладкости), *векторы* $f'_{m+1}(\hat{x}), \ldots, f_m(\hat{x})$ — *линейно независимы* (условие регулярности), *существует множитель Лагранжа* $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ *с* $\lambda_0 = 1$ *такой, что для функции Лагранжа задачи* (P)

$$\Lambda(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x)$$

выполняются условия экстремума I порядка:

a) *стационарности:*

$$\Lambda_x(\hat{x}, \lambda) = 0 \iff \frac{\partial \Lambda(\hat{x}, \lambda)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n \iff \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f'_i(\hat{x}) = 0;$$

b) *дополняющей нежесткости:*

$$\lambda_i f_i(\hat{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m';$$

c) *неотрицательности:*

$$\lambda_i \geqslant 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m';$$

и

$$\max_{\lambda \in Л} \langle \Lambda_{xx}(\hat{x}, \lambda)h, h \rangle > \alpha \|h\|^2 \quad \forall\, h \in K$$

с некоторой положительной константой α, *где* $K := \{h \in \mathbb{R}^n \mid \langle f'_i(\hat{x}), h \rangle \leqslant 0,\ i = 0, 1, \ldots, m',\ f'_i(\hat{x})[h] = 0,\ i = m' + 1, \ldots, m\}$ — *конус допустимых вариаций, а* $Л$ — *совокупность множителей Лагранжа* λ, *для которых выполнены условия* a)–c) *с* $\lambda_0 = 1$.

Тогда $\hat{x} \in \operatorname{locmin} P$ — *точка локального минимума в задаче* (P).

Доказательство этой теоремы см. [ГТ, с. 124].

Достаточное условие максимума формулируется аналогично, за исключением того, что множитель Лагранжа $\lambda = (-1, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, соответственно в конусе допустимых вариаций $\langle f'_0(\hat{x}), h \rangle \geqslant 0$ и

$$\max_{\lambda \in Л} \langle \Lambda_{xx}(\hat{x}, \lambda)h, h \rangle < -\alpha \|h\|^2 \quad \forall\, h \in K.$$

3.3. Правило решения

Для решения гладкой конечномерной задачи с ограничениями типа равенств и неравенств следует:

1) Составить функцию Лагранжа $\Lambda(x,\lambda)=\sum\limits_{i=0}^{m}\lambda_i f_i(x)$.

2) Выписать необходимое условие экстремума I порядка:
a) стационарности:

$$\Lambda_x(\hat{x},\lambda)=0 \iff \frac{\partial\Lambda(\hat{x},\lambda)}{\partial x_j}=0,\quad j=1,\dots,n;$$

b) дополняющей нежесткости:

$$\lambda_i f_i(\hat{x})=0,\quad i=1,\dots,m';$$

c) неотрицательности:

$$\lambda_i\geqslant 0,\quad i=0,1,\dots,m';$$

3) Найти точки $\hat{x}$, удовлетворяющие условиям a)–c) (эти точки называются *критическими*).

При этом следует отдельно рассмотреть случаи
a) $\lambda_0=0$;
b) $\lambda_0=1$ (или любой положительной константе);
c) $\lambda_0=-1$ (или любой отрицательной константе).

В случае a) критические точки могут доставлять и минимум, и максимум в задаче. В случае b) критические точки могут доставлять минимум в задаче. В случае c) критические точки могут доставлять максимум в задаче.

При нахождении критических точек в условиях дополняющей нежесткости $\lambda_i f_i(\hat{x})=0$ для каждого i надо рассматривать два случая: $\lambda_i=0$ и $\lambda_i\neq 0$.

4) Исследовать на локальный и абсолютный экстремум найденные критические точки или, если их нет, найти $S_{\min}$ и $S_{\max}$ и указать последовательности допустимых точек, на которых эти абсолютные экстремумы достигаются.

При этом можно пытаться воспользоваться непосредственной проверкой или перейти к исследованию условий экстремума II порядка в каждой критической точке. Отметим, что проверка выполнения необходимых или достаточных условий экстремума в задаче с ограничениями типа равенств и неравенств — задача непростая. Поэтому, как правило, мы будем при исследовании экстремума использовать непосредственную проверку, сравнивая значение исследуемой функции в критической точке с ее значениями в близких допустимых точках.

3.4. Примеры

Пример 1.

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2\to\min;\quad 2x_1-x_2+x_3\leqslant 5,\ x_1+x_2+x_3=3.$$

Решение. Функция Лагранжа

$$\Lambda=\lambda_0(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+\lambda_1(2x_1-x_2+x_3-5)+\lambda_2(x_1+x_2+x_3-3).$$

Необходимые условия локального минимума:
a) стационарности:

$$\Lambda_{x_1}=0\iff 2\lambda_0x_1+2\lambda_1+\lambda_2=0,$$

$$\Lambda_{x_2}=0\iff 2\lambda_0x_2-\lambda_1+\lambda_2=0,$$

$$\Lambda_{x_3}=0\iff 2\lambda_0x_3+\lambda_1+\lambda_2=0;$$

b) дополняющей нежесткости:

$$\lambda_1(2x_1-x_2+x_3-5)=0;$$

c) неотрицательности:

$$\lambda_0\geqslant 0,\ \lambda_1\geqslant 0.$$

Если $\lambda_0=0$, то из уравнений пункта a) выводим, что $\lambda_1=\lambda_2=0$ — все множители Лагранжа — нули, а этого быть не может.

Поэтому $\lambda_0\neq 0$, полагаем $\lambda_0=\frac{1}{2}$.

Предположим $\lambda_1\neq 0$, тогда в силу условия b) $2x_1-x_2+x_3-5=0$. Выражая x_1,x_2,x_3 из условия a) через λ_1,λ_2 и подставляя в уравнения $x_1+x_2+x_3=3$, $2x_1-x_2+x_3-5=0$, получим, что

$$\begin{cases}-2\lambda_1-3\lambda_2=3,\\ -6\lambda_1-2\lambda_2=5,\end{cases}$$

откуда $\lambda_1=-\frac{9}{14}<0$ — противоречие с условием неотрицательности c). Значит, в случае $\lambda_1\neq 0$ критических точек нет.

Пусть $\lambda_1=0$. Тогда $x_1=x_2=x_3=1$ — единственная критическая точка.

Функция $f(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2\to\infty$ при $|x|\to\infty$, значит по следствию из теоремы Вейерштрасса решение задачи существует, а в силу единственности критической точки решением может быть только она. Итак, $\hat{x}=(1,1,1)\in\operatorname{absmin}$, $S_{\min}=3$.

Пример 2. Приведение квадратичной формы к главным осям.

Пусть $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ — симметричная матрица ($a_{ij} = a_{ji}$) и $Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \langle Ax, x\rangle$ — соответствующая ей квадратичная форма.

Теорема. *В пространстве* $\mathbf{R}^n$ *существует ортонормированный базис* $f_1, \ldots, f_n$, *в котором квадратичная форма* Q *имеет представление*

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x, f_i\rangle^2.$$

В базисе $f_1, \ldots, f_n$ матрица формы Q диагональна. Направления векторов $f_1, \ldots, f_n$ называются *главными осями формы* Q, а переход к базису $f_1, \ldots, f_n$ называется *приведением формы к главным осям.*

Доказательство. Если $Q \equiv 0$, то $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, $f_1, \ldots, f_n$ — любая ортонормированная система.

Пусть $Q \not\equiv 0$, тогда Q принимает положительные или отрицательные значения. Для определенности считаем, что Q принимает отрицательные значения. Рассмотрим первую экстремальную задачу

$$\langle Ax, x\rangle \to \min; \quad \langle x, x\rangle \leqslant 1. \qquad (P_1)$$

Если Q принимает только неотрицательные значения, то надо рассматривать задачу на максимум.

Решение $\hat{x} = f_1$ задачи (P_1) по теореме Вейерштрасса существует, так как шар $S = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle x, x\rangle \leqslant 1\}$ является компактом в $\mathbf{R}^n$, а функция $\langle Ax, x\rangle$ непрерывна. Функция Лагранжа задачи (P_1) $\Lambda = \lambda_0\langle Ax, x\rangle + \lambda\big(\langle x, x\rangle - 1\big)$.

Необходимые условия локального минимума:

a) стационарности: $\Lambda_x = 0 \iff \lambda_0 Af_1 + \lambda f_1 = 0$;

b) дополняющей нежесткости: $\lambda(\langle f_1, f_1\rangle - 1) = 0$;

c) неотрицательности: $\lambda_0 \geqslant 0$, $\lambda \geqslant 0$.

Если $\lambda_0 = 0$, то $\lambda \neq 0$ и из пункта a) выводим, что $f_1 = 0$, но это противоречит условию b).

Поэтому $\lambda_0 \neq 0$, полагаем $\lambda_0 = 1$. Тогда из a) $Af_1 = -\lambda f_1$. Умножая последнее равенство скалярно на f_1, получим, что $\langle Af_1, f_1\rangle = -\lambda\langle f_1, f_1\rangle = S_{\min} < 0$. Отсюда $\lambda > 0$ и по условию b) $\langle f_1, f_1\rangle = 1$. Таким образом, f_1 — собственный вектор матрицы A, $Af_1 = \lambda_1 f_1$ ($\lambda_1 = -\lambda$), $|f_1| = 1$, $S_{\min} = \lambda_1$, λ_1 — минимальное собственное значение матрицы A.

Обозначим $L_1 = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle x, f_1\rangle = 0\}$ — подпространство в $\mathbf{R}^n$.

Если $Q(x) = 0 \ \forall\, x \in L_1$, то $\lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, $f_2, \ldots, f_n$ — любая ортонормированная система из L_1.

Пусть $Q \not\equiv 0$ на L_1. Тогда Q на L_1 принимает положительные или отрицательные значения. Для определенности теперь считаем, что Q принимает на L_1 положительные значения. Рассмотрим вторую задачу

$$\langle Ax, x\rangle \to \max; \quad \langle x, x\rangle \leqslant 1, \quad \langle x, f_1\rangle = 0. \qquad (P_2)$$

Решение $\hat{x} = f_2$ задачи (P_2) по теореме Вейерштрасса существует, так как сечение сферы S плоскостью L_1 является по-прежнему компактом. Функция Лагранжа $\Lambda = \lambda_0\langle Ax, x\rangle + \lambda\big(\langle x, x\rangle - 1\big) + 2\mu\langle x, f_1\rangle$.

Необходимые условия локального максимума:

a) стационарности: $\Lambda_x = 0 \iff \lambda_0 Af_2 + \lambda f_2 + \mu f_1 = 0$;

b) дополняющей нежесткости: $\lambda(\langle f_2, f_2\rangle - 1) = 0$;

c) неотрицательности: $\lambda_0 \leqslant 0$ (задача на максимум!), $\lambda \geqslant 0$.

Если $\lambda_0 = 0$, то из пункта a) выводим, что $\lambda f_2 + \mu f_1 = 0$. В силу линейной независимости векторов f_1 и f_2 следует, что $\lambda = \mu = 0$ — все множители Лагранжа — нули, а этого быть не может.

Поэтому $\lambda_0 \neq 0$, полагаем $\lambda_0 = -1$. Тогда из a) $Af_2 = \lambda f_2 + \mu f_1$. Умножая последнее равенство скалярно на f_1 и учитывая ортогональность векторов f_1 и f_2, получим, что $\langle Af_2, f_1\rangle = \lambda\langle f_2, f_1\rangle + \mu\langle f_1, f_1\rangle = \mu\langle f_1, f_1\rangle = \mu \Leftrightarrow \langle f_2, Af_1\rangle = \mu \Leftrightarrow \langle f_2, \lambda_1 f_1\rangle = \mu \Leftrightarrow 0 = \mu$. Умножая полученное равенство $Af_2 = \lambda f_2$ скалярно на f_2, получим, что $\langle Af_2, f_2\rangle = \lambda\langle f_2, f_2\rangle = S_{\max} > 0$. Отсюда $\lambda > 0$ и по условию b) $\langle f_2, f_2\rangle = 1$. Таким образом, f_2 — собственный вектор матрицы A, $Af_2 = \lambda_2 f_2$ ($\lambda_2 = \lambda$), векторы f_1 и f_2 ортогональны.

Далее поступаем подобным образом. Вводим подпространство $L_2 = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle x, f_1\rangle = 0, \ \langle x, f_2\rangle = 0\}$. Если $Q(x) = 0 \ \forall\, x \in L_2$, то $\lambda_3 = \ldots = \lambda_n = 0$, $f_3, \ldots, f_n$ — любая ортонормированная система из L_2. Пусть $Q \not\equiv 0$ на L_2. Тогда Q на L_2 принимает положительные или отрицательные значения. Вновь рассматриваем задачу на минимум или максимум:

$$\langle Ax, x\rangle \to \mathrm{extr}; \quad \langle x, x\rangle \leqslant 1, \quad \langle x, f_1\rangle = \langle x, f_2\rangle = 0. \qquad (P_3)$$

Решая эту задачу, получаем единичный вектор f_3 такой, что $Af_3 = \lambda_3 f_3$, f_3 ортогонально f_1 и f_2.

Поступая аналогично, в итоге придем к ортонормированному базису $f_1, \ldots, f_n$ из собственных векторов матрицы A с собственными числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. При этом для вектора $x = \sum_{i=1}^{n}\langle x, f_i\rangle f_i$ имеем $Ax = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\langle x, f_i\rangle f_i$ и

$$Q(x) = \langle Ax, x\rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\langle x, f_i\rangle f_i, \sum_{j=1}^{n}\langle x, f_j\rangle f_j \Big\rangle = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\langle x, f_i\rangle^2.$$

$\blacksquare$

3.5. Задачи

3.1. $x_1x_2x_3 \to \text{extr}; \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 1.$

3.2. $\sum\limits_{j=1}^n x_j^2 \to \text{extr}; \quad \sum\limits_{j=1}^n x_j^4 \leqslant 1.$

3.3. $\sum\limits_{j=1}^n x_j^4 \to \text{extr}; \quad \sum\limits_{j=1}^n x_j^2 \leqslant 1.$

3.4. $e^{x_1-x_2} - x_1 - x_2 \to \text{extr}; \quad x_1 + x_2 \leqslant 1,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$

3.5. $x_1^2 + x_2 \to \text{extr}; \quad x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$

3.6. $x_1^2+x_2^2+x_3^2 \to \text{extr}; \quad x_1+x_2+x_3 \leqslant 12, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0.$

3.7. $x_1^2+4x_2^2+x_3^2 \to \text{extr}; \quad x_1+x_2+x_3 \leqslant 12, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0.$

3.8. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to \text{extr}; \quad x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 1, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_1 + x_2 - x_3 = \frac{1}{2}.$

3.9. $2x_1^2 + 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 \to \text{extr}; \quad 8x_1 - 3x_2 + 3x_3 \leqslant 40,$
$-2x_1 + x_2 - x_3 = -3, \quad x_2 \geqslant 0.$

3.10. $2x_1^2 + 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 \to \text{extr}; \quad 8x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 40,$
$-2x_1 + x_2 - x_3 \leqslant -3, \quad x_2 \geqslant 0.$

3.11. $3x_1^2 - 11x_1 - 3x_2 - x_3 \to \text{extr}; \quad x_1 - 7x_2 + 3x_3 + 7 \leqslant 0,$
$5x_1 + 2x_2 - x_3 \leqslant 2, \quad x_3 \geqslant 0.$

3.12. $3x_2^2 - 11x_1 - 3x_2 - x_3 \to \text{extr}; \quad x_1 - 7x_2 + 3x_3 + 7 \leqslant 0,$
$5x_1 + 2x_2 - x_3 \leqslant 2, \quad x_3 \geqslant 0.$

3.13. $x_1x_3 - 2x_2 \to \text{extr}; \quad 2x_1 - x_2 - 3x_3 \leqslant 10, \quad x_2 \geqslant 0, \quad 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6.$

3.14. $x_1x_2x_3 \to \text{extr}; \quad x_3 \geqslant 1, \quad x_1 \geqslant 1, \quad x_2 \geqslant 1, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 8.$

3.15. Доказать неравенство для средних степенных

$$\left(\frac{\sum\limits_{j=1}^n |x_j|^p}{m}\right)^{1/p} \leqslant \left(\frac{\sum\limits_{j=1}^n |x_j|^q}{m}\right)^{1/q}, \quad 0 < p \leqslant q \leqslant \infty,$$

путем решения экстремальной задачи

$$\sum_{j=1}^n |x_j|^p \to \max; \quad \sum_{j=1}^n |x_j|^q = a^q \quad (1 < p < q,\ a > 0).$$

3.15. Доказать неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\left(\prod_{j=1}^m x_j\right)^{1/m} \leqslant \frac{\sum\limits_{j=1}^n x_j}{m} \quad \forall\, x_j \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

§ 4. Выпуклые задачи

Пусть в этом пункте X — линейное нормированное пространство (определение линейного нормированного пространства см. в § 5), для простоты понимания можно считать, что $X = \mathbf{R}^n$ — конечномерное пространство.

4.1. Элементы выпуклого анализа. Субдифференциал

Напомним определение выпуклого множества. Множество $A \subset X$ называется *выпуклым*, если для любых двух точек a_1 и a_2 из A и любого числа $t \in (0, 1)$ элемент $ta_1 + (1-t)a_2 \in A$.

Пусть задана функция (функционал) $f\colon X \to \overline{\mathbf{R}} := \mathbf{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. Множество

$$\operatorname{epi} f = \{(a, x) \in \mathbf{R} \times X \mid a \geqslant f(x)\}$$

в пространстве $\mathbf{R} \times X$ называется *надграфиком* функции f. Функция f называется *выпуклой*, если надграфик f — выпуклое множество. Функция f называется *собственной*, если $f(x) > -\infty\ \forall\, x$ и $f \not\equiv +\infty$.

Мы будем изучать выпуклые собственные функции. Для краткости будем называть их просто «выпуклые» функции.

Из определения выпуклого множества сразу следует, что функция выпукла тогда и только тогда, когда выполнено *неравенство Иенсена*:

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \quad \forall\, x_1, x_2 \in X, \quad \forall\, t \in (0, 1).$$

Выпуклость многих классических функций одной переменной сразу вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1. [Р, с. 42] *Пусть функция $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ дважды непрерывно дифференцируема ($f \in D^2(\mathbf{R})$). Тогда она выпукла тогда и только тогда, когда ее вторая производная неотрицательна $(f''(x) \geqslant 0\ \forall\, x \in \mathbf{R})$.*

Приведем несколько примеров выпуклых функций, выпуклость которых сразу следует из теоремы 1 и определения выпуклой функции.

1. $f(x) = e^{ax}$, $a \in \mathbf{R}$.
2. $f(x) = |x|^p$, $p \geqslant 1$.

В многомерном случае ($f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$) выпуклой является аффинная функция $f(x) = \langle a, x\rangle + b$, $a \in \mathbf{R}^n$, $b \in \mathbf{R}$ (выпуклость тривиально следует из неравенства Иенсена).

Квадратичная функция $Q(x) = \langle Ax, x\rangle$, где A — симметричная матрица, является выпуклой тогда и только тогда, когда матрица A неотрицательно определена.

Это сразу вытекает из следующего многомерного обобщения теоремы 1.

Теорема 2. [Р, с. 44] *Пусть функция* $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *дважды непрерывно дифференцируема* $\left(f \in D^2(\mathbf{R}^n)\right)$. *Тогда она выпукла тогда и только тогда, когда ее матрица вторых производных (гессиан) неотрицательно определена*

$$\left(f''(x) = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n} \geqslant 0 \;\forall\, x \in \mathbf{R}^n\right).$$

Выпуклыми функциями многих переменных (функционалами) являются следующие функции:

1. *Функция нормы*

$$f(x) =: \|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p}, \; 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

2. *Индикаторная функция* выпуклого множества $A \subset X$

$$\delta A(x) = \begin{cases} 0, & x \in A; \\ +\infty, & x \notin A. \end{cases}$$

3. *Функция Минковского* выпуклого множества $A \subset X$

$$\mu A(x) = \begin{cases} 0, & \alpha x \in A \;\forall\, \alpha > 0; \\ +\infty, & \alpha x \notin A \;\forall\, \alpha > 0; \\ \min\{\alpha \geqslant 0 \mid \alpha^{-1} x \in A\}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

4. *Опорная функция* непустого множества $A \subset X$

$$sA(y) = \max_{x \in A} \langle y, x \rangle.$$

Дадим определение важного понятия выпуклого анализа — понятия субдифференциала функции, обобщающего для выпуклых функций понятие производной в гладком анализе.

Субдифференциалом выпуклой функции f в точке $\hat{x}$ называется следующее множество в сопряженном пространстве X^*:

$$\partial f(\hat{x}) = \left\{ y \in X^* \mid \langle x - \hat{x}, y \rangle \leqslant f(x) - f(\hat{x}) \quad \forall\, x \in X \right\}.$$

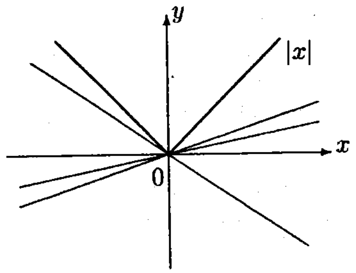
Напомним, что сопряженным пространством X^* называется пространство линейных непрерывных функционалов на X. В случае $X = \mathbf{R}^n$ сопряженное пространство $(\mathbf{R}^n)^* = \mathbf{R}^n$.

Из определения сразу вытекает, что субдифференциал — выпуклое множество в X^*. Легко доказать, что оно замкнуто. Субдифференциал дифференцируемой функции совпадает с ее производной.

Для функций одного переменного субдифференциал $\partial f(\hat{x})$ — это совокупность угловых коэффициентов k, при которых прямые $y = kx + b$, проходящие через точку $(\hat{x}, f(\hat{x}))$, лежат под графиком функции $y = f(x)$.

Пример. $f(x) = |x|$. (см. рис. 6).

Для субдифференциала суммы функций имеет место теорема аналогичная теореме о производной суммы функций.



$$\partial f(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x, & x \neq 0, \\ [-1, 1], & x = 0. \end{cases}$$

Рис. 6.

Теорема Моро—Рокафеллара. [Глава 6, Введение] *Пусть* f_1 *и* f_2 — *выпуклые функции на* X. *Существует точка* x_0, *в которой функция* f_1 *конечна* $\left(|f_1(x_0)| < \infty\right)$, *а функция* f_2 *непрерывна. Тогда*

$$\partial(f_1 + f_2)(x) = \partial f_1(x) + \partial f_2(x) \quad \forall\, x.$$

Теорема Моро—Рокафеллара иногда формулируется для сублинейных функций.

Функция p называется *сублинейной*, если

a) $p(\lambda x) = \lambda f(x)$ для любого $\lambda > 0$, для любого $x \in X$;

b) $p(x_1 + x_2) \leqslant p(x_1) + p(x_2)$ для любых $x_1, x_2 \in X$.

Очевидно, что сублинейная функция является выпуклой. Выпуклая функция не обязана быть сублинейной. Нетрудно видеть, что надграфик сублинейной функции — выпуклый конус.

Теорема. *Пусть* p_1, p_2 — *сублинейные функции, функция* p_1 *непрерывна, функция* p_2 *замкнута. Тогда в точке* $\hat{x} = 0$

$$\partial(p_1 + p_2) = \partial p_1 + \partial p_2.$$

При доказательстве необходимых условий экстремума в гладкой задаче с равенствами и неравенствами нам понадобится следующая теорема о субдифференциале максимума.

Теорема Дубовицкого—Милютина. [Глава 6, Введение] *Пусть* f_1 *и* f_2 — *непрерывные выпуклые функции на* X, $f_1(\hat{x}) = f_2(\hat{x})$. *Тогда*

$$\partial \max\{f_1, f_2\}(\hat{x}) = \operatorname{conv}\left(\partial f_1(\hat{x}) \cup \partial f_2(\hat{x})\right).$$

Сформулируем также теорему Дубовицкого—Милютина для сублинейных функций.

Теорема. *Пусть* p_1, p_2 — *непрерывные сублинейные функции. Тогда*

$$\partial \max\{p_1, p_2\}(0) = \operatorname{conv}\left(\partial p_1(0) \cup \partial p_2(0)\right).$$

4.2. Теоремы отделимости

При выводе необходимых условий экстремума (принципа Лагранжа) в выпуклых задачах и в задачах с равенствами и неравенствами мы будем использовать свойство отделимости непересекающихся выпуклых множеств.

Определение 1. Множества A и B из пространства X называются *отделимыми*, если существует линейный непрерывный функционал $\lambda \in X^*$, $\lambda \neq 0$, для которого

$$\min_{a\in A}\langle \lambda, a\rangle \geqslant \max_{b\in B}\langle \lambda, b\rangle.$$

Из определения следует, что множества являются отделимыми, если можно провести гиперплоскость $H = \{x \in X \mid \langle \lambda, x\rangle = c\}$, $c \in \mathbb{R}$, так что одно из множеств лежит в одном замкнутом полупространстве $H_+ = \{x \in X \mid \langle \lambda, x\rangle \geqslant c\}$, а другое — в другом замкнутом полупространстве $H_- = \{x \in X \mid \langle \lambda, x\rangle \leqslant c\}$.

Определение 2. Множества A и B называются *строго отделимыми*, если существует линейный непрерывный функционал $\lambda \in X^*$, для которого

$$\min_{a\in A}\langle \lambda, a\rangle > \max_{b\in B}\langle \lambda, b\rangle.$$

Приведем результаты об отделимости в конечномерном случае.

Теорема 1 (первая теорема отделимости в конечномерном случае). *Пусть A и B — непустые выпуклые множества в $\mathbb{R}^n$, $A \cap B = \varnothing$. Тогда множества A и B отделимы.*

Теорема 2 (вторая теорема отделимости в конечномерном случае). *Пусть A — непустое выпуклое замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$, $b \notin A$. Тогда точку b можно строго отделить от множества A.*

Доказательство теорем 1, 2 см. [ГТ, с. 20].

Сформулируем результаты об отделимости в случае нормированных пространств.

Теорема 1′ (первая теорема отделимости в нормированных пространствах). *Пусть A и B — непустые выпуклые множества в X, $\operatorname{int} A \neq \varnothing$, $\operatorname{int} A \cap B = \varnothing$. Тогда множества A и B отделимы.*

Теорема 2′ (вторая теорема отделимости в нормированных пространствах). *Пусть A — непустое выпуклое замкнутое множество в X, $b \notin A$. Тогда точку b можно строго отделить от множества A.*

Доказательство теорем 1′, 2′ см. [АТФ, с. 124].

4.3. Задачи без ограничений

Пусть $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ — выпуклая функция, отображающая нормированное пространство X в расширенную прямую. *Выпуклой задачей без ограничений* называется следующая экстремальная задача:

$$f(x) \to \min. \qquad (P)$$

Теорема (аналог теоремы Ферма). *Для того чтобы точка $\hat{x}$ доставляла в выпуклой задаче без ограничений (P) абсолютный минимум ($\hat{x} \in \operatorname{absmin} P$), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение*

$$0 \in \partial f(\hat{x}).$$

Доказательство.

$$\hat{x} \in \operatorname{absmin} P \Leftrightarrow f(x) - f(\hat{x}) \geqslant 0 = \langle 0, x - \hat{x}\rangle \ \forall\, x \in X \Leftrightarrow 0 \in \partial f(\hat{x}).$$

■

Поскольку из выпуклости функции f не следует, вообще говоря, выпуклость функции $-f$, то существенно, что рассматривается задача минимизации, а не максимизации.

4.4. Задачи с ограничением

Пусть $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ — выпуклая функция, отображающая нормированное пространство X в расширенную прямую, $D \subset X$ — выпуклое множество. *Выпуклой задачей с ограничением* (или просто *выпуклой задачей*) называется следующая экстремальная задача:

$$f(x) \to \min; \quad x \in D. \qquad (P)$$

Теорема. *Пусть $\hat{x} \in \operatorname{locmin} P$ — доставляет локальный минимум в выпуклой задаче (P). Тогда $\hat{x} \in \operatorname{absmin} P$ — доставляет абсолютный минимум в этой задаче.*

Доказательство. Пусть $\hat{x} \in \operatorname{locmin} P$. Это означает, что существует окрестность U точки $\hat{x}$, такая, что $-\infty < f(\hat{x}) \leqslant f(x)\ \forall\, x \in U \cap D$. Возьмем произвольную точку $x \in D$. Тогда $\bar{x} = (1-\alpha)\hat{x} + \alpha x \in U \cap D$ при достаточно малом $\alpha > 0$. Следовательно, по неравенству Иенсена $f(\hat{x}) \leqslant f(\bar{x}) \leqslant (1-\alpha)f(\hat{x}) + \alpha f(x)$, откуда $\alpha f(\hat{x}) \leqslant \alpha f(x) \Leftrightarrow f(\hat{x}) \leqslant f(x)\ \forall\, x \in D$. Значит, $\hat{x}$ доставляет абсолютный минимум в задаче (P). ■

Из теоремы следует, что в выпуклой задаче локальный минимум является и абсолютным (глобальным). Поэтому в дальнейшем в выпуклых задачах, говоря «минимум», имеем в виду абсолютный минимум.

4.5. Задача выпуклого программирования

Пусть $f_i\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, — выпуклые функции, отображающие нормированное пространство X в расширенную прямую, $A \subset X$ — выпуклое множество. *Задачей выпуклого программирования* называется следующая экстремальная задача:

$$f_0(x) \to \min; \quad f_i(x) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad x \in A. \tag{P}$$

Точка x называется *допустимой* в задаче (P), если $x \in A$ и выполняются все заданные ограничения типа неравенств.

Упражнение. Докажите, что задача выпуклого программирования является выпуклой задачей, т. е., что множество допустимых элементов в этой задаче является выпуклым множеством.

При проверке достаточных условий минимума в задаче выпуклого программирования будет использоваться некоторое условие регулярности множества допустимых элементов — условие Слейтера. Множество допустимых элементов в задаче (P) удовлетворяет *условию Слейтера*, если существует точка $\bar{x} \in A$, для которой $f_i(\bar{x}) < 0$, $i = 1, \ldots, m$.

Теорема Куна—Таккера.

1. *Если $\hat{x} \in \operatorname{absmin} P$ — решение задачи выпуклого программирования, то найдется ненулевой вектор множителей Лагранжа $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$, такой, что для функции Лагранжа $\Lambda(x) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x)$ выполняются условия:*

a) *принцип минимума для функции Лагранжа*

$$\min_{x \in A} \Lambda(x) = \Lambda(\hat{x});$$

b) *дополняющей нежесткости:*

$$\lambda_i f_i(\hat{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m;$$

c) *неотрицательности:*

$$\lambda_i \geqslant 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m.$$

2. *Если для допустимой точки $\hat{x}$ выполнены условия a)—c) и $\lambda_0 \neq 0$, то $\hat{x} \in \operatorname{absmin} P$.*

3. *Если для допустимой точки $\hat{x}$ выполнены условия a) – c) и множество допустимых элементов удовлетворяет условию Слейтера, то $\hat{x} \in \operatorname{absmin} P$.*

Доказательство. Пусть $\hat{x} \in \operatorname{absmin} P$. Не ограничивая общности, считаем, что $f_0(\hat{x}) = 0$ — иначе введем новую функцию $\tilde{f}_0(x) = f_0(x) - f_0(\hat{x})$. Положим

$$B = \left\{ b = (b_0, b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \exists\, x \in A : \ f_i(x) \leqslant b_i, \ i = 0, 1, \ldots, m \right\}.$$

Покажем, что B — *непустое выпуклое множество.* Действительно, неотрицательный октант $\mathbb{R}_+^{m+1} \subset B$, т. е. любой вектор с неотрицательными компонентами принадлежит B, ибо в определении множества B можно положить $x = \hat{x}$. Докажем выпуклость множества B. Пусть точки b и b' принадлежат множеству B. Надо доказать, что $\alpha b + (1-\alpha) b' \in B \ \forall\, \alpha \in (0,1)$. Поскольку точки $b, b' \in B$, то по определению множества B существуют $x, x' \in A$ такие, что $f_i(x) \leqslant b_i$, $f_i(x') \leqslant b'_i$, $i = 0, 1, \ldots, m$. Положим $x_\alpha = \alpha x + (1-\alpha) x'$. Тогда $x_\alpha \in A$, поскольку A — выпукло, а ввиду выпуклости функций f_i, $i = 0, 1, \ldots, m$, по неравенству Иенсена

$$f_i(x_\alpha) = f_i\big(\alpha x + (1-\alpha) x'\big) \leqslant \alpha f_i(x) + (1-\alpha) f_i(x') \leqslant \alpha b_i + (1-\alpha) b'_i,$$

т. е. точка $\alpha b + (1-\alpha) b' \in B$.

Обозначим $C = \left\{ c = (c_0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid c_0 < 0 \right\}$ — открытый луч в пространстве $\mathbb{R}^{m+1}$. Ясно, что C — *непустое выпуклое множество.* Покажем, что $C \cap B = \varnothing$. Действительно, если бы существовала точка $c \in C \cap B$, то ввиду определения множества B отсюда следовало бы, что имеется элемент $\bar{x} \in A$, для которого выполняются неравенства: $f_0(\bar{x}) \leqslant c_0 < 0$, $f_i(\bar{x}) \leqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$. Но из этих неравенств следует, что для допустимой точки $\bar{x}$ $f_0(\bar{x}) < f_0(\hat{x}) = 0$, т. е. $\hat{x} \notin \operatorname{absmin} P$. Получили противоречие с условием теоремы $\hat{x} \in \operatorname{absmin} P$. Значит $C \cap B = \varnothing$.

По первой теореме отделимости в конечномерном случае множества B и C можно отделить, т. е. существует вектор $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \neq 0$, для которого

$$\min_{b \in B} \sum_{i=0}^{m} \lambda_i b_i \geqslant \max_{c \in C} \sum_{i=0}^{m} \lambda_i c_i = \max_{c_0 < 0} \lambda_0 c_0 \geqslant 0\,.$$

Таким образом,

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i b_i \geqslant 0 \quad \forall\, b \in B\,. \tag{$*$}$$

Из неравенства $(*)$ будут выведены условия неотрицательности, дополняющей нежесткости и принцип минимума.

1. *Условие неотрицательности.* Поскольку, как мы уже говорили, любой вектор с неотрицательными компонентами принадлежит B, то вектор $(0,\dots,0,1,0,\dots,0)\in B$, где единица стоит на i-ом месте (счет начинаем с нуля). Подставив эту точку в неравенство $(*)$, получим, что $\lambda_i\geqslant 0$.

Условие дополняющей нежесткости. Нетрудно видеть, что точка $(0,\dots,0,f_i(\hat{x}),0,\dots,0)\in B$. Действительно, в определении множества B возьмем $x=\hat{x}$, тогда $x\in B$ и нужные неравенства выполняются. Подставив эту точку в неравенство $(*)$, имеем $\lambda_i f_i(\hat{x})\geqslant 0$. Если $\lambda_i f_i(\hat{x})>0$, то (так как по уже доказанному условию неотрицательности $\lambda_i\geqslant 0$) $f_i(\hat{x})>0$ — это противоречит допустимости точки $\hat{x}$. Значит, $\lambda_i f_i(\hat{x})=0$.

Принцип минимума. Возьмем точку $x\in A$, тогда точка $\big(f_0(x), f_1(x),\dots,f_m(x)\big)\in B$. Отсюда по неравенству $(*)$

$$\Lambda(x)=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i f_i(x)\geqslant 0=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i f_i(\hat{x}),$$

так как, не ограничивая общности, положили $f_0(\hat{x})=0$ и по уже доказанному условию дополняющей нежесткости $\lambda_i f_i(\hat{x})=0$, $i=1,\dots,m$. Таким образом, принцип минимума для функции Лагранжа доказан.

2. Пусть для допустимой точки $\hat{x}$ выполнены условия a)–c) и $\lambda_0\neq 0$. Положим $\lambda_0=1$. Тогда для любой допустимой точки x будет выполняться неравенство

$$f_0(\hat{x})\overset{b)}{=}f_0(\hat{x})+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(\hat{x})\overset{\text{def}}{=}\Lambda(\hat{x})\leqslant$$
$$\overset{a)}{\leqslant}\Lambda(x)\overset{\text{def}}{=}f_0(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(x)\overset{c)}{\leqslant}f_0(x).$$

Это означает, что $\hat{x}\in\operatorname{absmin}P$.

3. Пусть для допустимой точки $\hat{x}$ выполнены условия a)–c) и множество допустимых элементов удовлетворяет условию Слейтера. Предположим, что при этом $\lambda_0=0$. Так как вектор $\lambda\neq 0$, то в силу условия неотрицательности существует $\lambda_j>0$, $j\in\{1,\dots,m\}$. Следовательно,

$$\Lambda(\bar{x})=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(\bar{x})\overset{c)}{\leqslant}\lambda_j f_j(\bar{x})<0\overset{b)}{=}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(\hat{x})=\Lambda(\hat{x}).$$

Но это неравенство противоречит с условием a). Значит, наше предположение, что $\lambda_0=0$ неверно. Поэтому $\lambda_0\neq 0$ и по доказанному п. 2 $\hat{x}\in\operatorname{absmin}P$.

Теорема Куна—Таккера полностью доказана. ∎

Пример.

$$f(x_1,x_2)=x_1^2+x_1x_2+x_2^2+3|x_1+x_2-2|\to\min.$$

Решение. Функция $f(x_1,x_2)$ является выпуклой функцией как сумма двух выпуклых функций. Функция $g(x_1,x_2)=x_1^2+x_1x_2+x_2^2$ выпукла, так как по критерию Сильвестра матрица вторых производных

$$A=\left(\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{2}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$$

не зависит от x и положительно определена. Очевидно, что функция $h(x_1,x_2)=|x_1+x_2-2|$, являющаяся модулем линейной функции также является выпуклой функцией.

Необходимое и достаточное условие экстремума в выпуклой задаче без ограничений:

$$0\in\partial f(\hat{x})=\partial g(\hat{x})+3\partial h(\hat{x}).$$

Для дифференцируемой функции ее субдифференциал совпадает с производной: $\partial g(\hat{x})=(2\hat{x}_1+\hat{x}_2,\hat{x}_1+2\hat{x}_2)$. Найдем $\partial h(\hat{x})$. По определению субдифференциала

$$a=(a_1,a_2)\in\partial h(\hat{x})\iff\langle x-\hat{x},a\rangle\leqslant h(x)-h(\hat{x})\quad\forall\, x\in\mathbf{R}^2\iff$$
$$a_1x_1+a_2x_2-a_1\hat{x}_1-a_2\hat{x}_2\leqslant|x_1+x_2-2|-|\hat{x}_1+\hat{x}_2-2|\iff$$
$$a_1(x_1+x_2)+(a_2-a_1)x_2\leqslant|x_1+x_2-2|-|\hat{x}_1+\hat{x}_2-2|+a_1\hat{x}_1+a_2\hat{x}_2.$$

Отсюда вытекает, что $|a_1|\leqslant 1$ и $a_1=a_2$, т.е. $a=(\alpha,\alpha)$, $|\alpha|\leqslant 1$. Поэтому

$$\partial h(\hat{x})=\begin{cases}(1,1), & x_1+x_2-2>0,\\ (\alpha,\alpha),\ |\alpha|\leqslant 1, & x_1+x_2-2=0,\\ (-1,-1), & x_1+x_2-2<0\end{cases}\Rightarrow 0\in\partial f(\hat{x})\iff$$

$$\begin{cases}2x_1+x_2+3=0,\\ x_1+2x_2+3=0\end{cases}\quad\text{при}\quad x_1+x_2-2>0;\qquad\text{(i)}$$

$$\begin{cases}2x_1+x_2+3\alpha=0,\\ x_1+2x_2+3\alpha=0\end{cases}\quad\text{при}\quad x_1+x_2-2=0,\quad(|\alpha|\leqslant 1);\qquad\text{(ii)}$$

$$\begin{cases}2x_1+x_2-3=0,\\ x_1+2x_2-3=0\end{cases}\quad\text{при}\quad x_1+x_2-2<0.\qquad\text{(iii)}$$

В случае (i) нет критических точек, так как из уравнений системы следует, что $x_1+x_2=-2$ — противоречие с условием $x_1+x_2-2>0$. В случае (iii) также нет критических точек, так как из уравнений системы следует, что $x_1+x_2=2$ — противоречие с условием $x_1+x_2-2<0$. В случае (ii) система из трех уравнений с тремя неизвестными имеет единственное решение $x_1=x_2=1$, $\alpha=-1$. Таким образом, $S_{\min}=3$, при $x_1=x_2=1$.

4.6. Задачи, упражнения

В задачах 4.1–4.4 выяснить, при каких значениях параметра функции являются выпуклыми:

4.1. $f(x) = ax^2 + bx + c$.

4.2. $f(x) = ae^{2x} + be^x + c$.

4.3. $f(x_1, x_2) = \left(|x_1|^p + |x_2|^p\right)^{1/p} \quad (p > 0)$.

4.4. $f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$.

В задачах 4.5–4.6 выяснить, являются ли выпуклыми функции:

4.5. $f(x) = x\ln x + (1-x)\ln(1-x)$.

4.6. $f(x) = \min\left\{x_1^2 + x_2^2 \mid x_1 + x_2 = x\right\}$.

4.7. $f(x) = 2|x-1| + |x|$; $\partial f(\hat{x}) = ?$

В задачах 4.8–4.15 вычислить субдифференциалы выпуклых функций в точке $\hat{x} = 0$:

4.8. $f(x) = \max\{x, 0\}$.

4.9. $f(x) = \max\{e^x, 1-x\}$.

4.10. $f(x_1, \ldots, x_n) = |x| := \left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j\right)^{1/2}$.

4.11. $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|$.

4.12. $f(x_1, \ldots, x_n) = \max\limits_{j=1,\ldots,n} |x_j|$.

4.13. $f(x_1, \ldots, x_n) = \max\limits_{j=1,\ldots,n} x_j$.

4.14. $f(x_1, \ldots, x_n) = \max\left\{0, \langle a, x\rangle\right\} \quad (a \in \mathbf{R}^n)$.

4.15. $f\colon X \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \|x\|$ (X — нормированное пространство).

4.16. Доказать, что любая выпуклая функция, конечная на всей прямой, непрерывна.

4.17. Доказать, что не существует выпуклой ограниченной функции, определенной на всей прямой и отличной от константы.

Решить выпуклые задачи 4.18–4.21:

4.18. $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 + 3|x_1 - x_2 - 2| \to \min$.

4.19. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4\max\{x_1, x_2\} \to \min$.

4.20. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} \to \min$.

4.21. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2\alpha|x_1 + x_2 - 1| \to \min \qquad (\alpha > 0)$.

§ 5. Элементы функционального анализа

5.1. Нормированные и банаховы пространства

5.1.1. Определение пространств

Линейное пространство X называется *нормированным*, если на X определен функционал $\|\cdot\|\colon X \to \mathbf{R}$, называемый *нормой* и удовлетворяющий условиям:

a) $\|x\| \geqslant 0 \quad \forall\, x \in X$ и $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
b) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \quad \forall\, \alpha \in \mathbf{R},\ \forall\, x \in X$;
c) $\|x_1 + x_2\| \leqslant \|x_1\| + \|x_2\| \quad \forall\, x_1, x_2 \in X$.

Линейное нормированное пространство иногда будем называть для краткости нормированным пространством. Иногда, чтобы подчеркнуть, что норма задана именно на X, мы пишем $\|x\|_X$. Две нормы на X $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ называются *эквивалентными*, если существуют положительные константы C_1 и C_2 такие, что

$$C_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C_2\|x\|_1.$$

Всякое нормированное пространство становится *метрическим*, если в нем ввести расстояние $d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|$. В метрическом пространстве естественным образом вводятся понятия открытых и замкнутых множеств, сходимость.

Последовательность точек $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ метрического пространства называется *фундаментальной*, если она удовлетворяет *критерию Коши*, т. е. если для любого $\varepsilon > 0$ существует N_ε такое, что $d(x_{n_1}, x_{n_2}) < \varepsilon$ для всех $n_1, n_2 > N_\varepsilon$.

Метрическое пространство называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность сходится.

Полное относительно введенного расстояния метрическое пространство называется *банаховым* пространством.

Отметим, что всякое конечномерное нормированное пространство является банаховым. Бесконечномерное нормированное пространство не обязано быть банаховым.

5.1.2. Произведение пространств

Пусть X и Y — линейные нормированные пространства. Декартово произведение $X \times Y$ можно превратить в линейное нормированное пространство, введя норму

$$\|(x, y)\|_{X\times Y} = \max\left\{\|x\|_X, \|y\|_Y\right\}.$$

Легко проверить, что все аксиомы нормы выполняются.

Отметим очевидное утверждение: *декартово произведение банаховых пространств банахово.*

5.1.3. Примеры банаховых пространств

1. Конечномерное пространство $\mathbf{R}^n$, состоящее из векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ с нормой $\|x\| = |x| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2}$. Эту норму иногда называют *евклидовой нормой*, а расстояние, вводимое с помощью этой нормы, называют *евклидовым расстоянием*.

2. Пространство $C([t_0, t_1]) := C([t_0, t_1], \mathbf{R})$ непрерывных на отрезке $[t_0, t_1]$ функций $x(\cdot)$ с нормой

$$\|x(\cdot)\|_{C([t_0,t_1])} =: \|x(\cdot)\|_0 = \max_{t\in[t_0,t_1]} |x(t)|.$$

Обобщением этого пространства является пространство $C(K, \mathbf{R}^n)$ непрерывных вектор-функций $x(\cdot)$: $K \to \mathbf{R}^n$, заданных на компакте K с нормой $\|x(\cdot)\|_0 = \max_{t\in K} |x(t)|$.

3. Пространство $C^1([t_0, t_1]) := C^1([t_0, t_1], \mathbf{R})$ непрерывно дифференцируемых на отрезке $[t_0, t_1]$ функций $x(\cdot)$ с нормой

$$\|x(\cdot)\|_{C^1([t_0,t_1])} =: \|x(\cdot)\|_1 = \max\left\{\|x(\cdot)\|_{C([t_0,t_1])}, \|\dot{x}(\cdot)\|_{C([t_0,t_1])}\right\}.$$

4. Пространство l_2, состоящее из последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ (иногда пишем, $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$), для которых $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$, с нормой, задаваемой формулой $\|x\|_{l_2} := \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{1/2}$.

5.1.4. Сопряженное пространство, оператор

Совокупность X^* всех линейных непрерывных функционалов на нормированном пространстве X образует *сопряженное* к X пространство. Оно является банаховым пространством относительно нормы

$$\|x^*\|_{X^*} := \max_{\|x\|_X \leqslant 1} \langle x^*, x\rangle,$$

где $\langle x^*, x\rangle$ означает действие функционала x^* на элемент x.

Пусть X и Y — нормированные пространства. Через $L(X, Y)$ обозначим пространство линейных непрерывных операторов из X в Y. Пусть $\Lambda \in L(X, Y)$. Тогда можно определить *сопряженный оператор* Λ^*: $Y^* \to X^*$ такой, что

$$\langle \Lambda^* y^*, x\rangle = \langle y^*, \Lambda x\rangle \quad \forall\, x \in X.$$

Для линейного непрерывного функционала на произведении пространств имеет место следующая очевидная

Лемма. *Всякий функционал $\Lambda \in (X \times Y)^*$ однозначно представляется в виде*

$$\langle \Lambda, (x, y)\rangle = \langle x^*, x\rangle + \langle y^*, y\rangle,$$

где $x^* \in X^*$, $y^* \in Y^*$.

5.2. Определения производных

Для вещественных функций одного вещественного переменного два определения — существование конечного предела

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\hat{x} + h) - f(\hat{x})}{h} \tag{1}$$

и возможность асимптотического разложения при $h \to 0$

$$f(\hat{x} + h) = f(\hat{x}) + f'(\hat{x})h + o(h) \tag{2}$$

— приводят к одному и тому же понятию дифференцируемости. Но уже для функций двух и большего числа переменных существует несколько различных подходов к понятию дифференцируемости (гладкости). Определение (1) ведет к понятиям производной по направлению, вариации по Лагранжу и производной Гато. Определение (2) ведет к понятиям производной Фреше и строгой дифференцируемости.

Пусть далее в этом пункте X, Y, Z — линейные нормированные пространства. Как правило (если это не оговорено иначе), f: $X \to Y$ — отображение пространства X или некоторой окрестности точки $\hat{x} \in X$ в пространство Y^*.

5.2.1. Производная по направлению

Будем говорить, что отображение f имеет в точке $\hat{x}$ *производную по направлению* h, если существует

$$\lim_{\lambda\to+0} \frac{f(\hat{x} + \lambda h) - f(\hat{x})}{\lambda} =: \delta_+ f(\hat{x}, h).$$

5.2.2. Вариация по Лагранжу

Если отображение f имеет в точке $\hat{x}$ производную по всем направлениям и $\delta_+ f(\hat{x}, h) = -\delta_+ f(\hat{x}, -h) =: \delta f(\hat{x}, h)$ $\forall\, h \in X$, то говорят, что отображение f *имеет в точке $\hat{x}$ вариацию по Лагранжу*. При этом отображение $h \to \delta f(\hat{x}, h)$ называют *вариацией по Лагранжу*. Таким образом, вариация по Лагранжу

$$\delta f(\hat{x}, h) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{f(\hat{x} + \lambda h) - f(\hat{x})}{\lambda}.$$

* Но вполне содержателен пример, когда $X = \mathbf{R}^n$, $Y = \mathbf{R}^m$. Элемент из $L(X, Y)$ определяется в этом случае матрицей размера $n \times m$.

5.2.3. Производная Гато

Если оператор вариации по Лагранжу $\delta f(\hat{x},\cdot)$: $X \to Y$ линеен и непрерывен по h $\left(\delta f(\hat{x},\cdot) \in L(X,Y)\right)$, то говорят, что f *дифференцируемо по Гато в точке* $\hat{x}$, а оператор $\delta f(\hat{x},\cdot)$ называется *производной Гато отображения* f *в точке* $\hat{x}$ и обозначается $f'_G(\hat{x})$.

Таким образом, если f дифференцируемо по Гато в точке $\hat{x}$, то для любого фиксированного h имеет место разложение

$$f(\hat{x}+\lambda h) = f(\hat{x}) + \lambda f'_G(\hat{x})[h] + r(h,\lambda),$$

где $\|r(h,\lambda)\|_Y = o(|\lambda|)$ при $\lambda \to 0$.

5.2.4. Производная Фреше

Отображение f называют *дифференцируемым по Фреше в точке* $\hat{x}$ и пишут $f \in D(\hat{x})$, если существуют линейный непрерывный оператор $f'(\hat{x})$: $X \to Y$ и отображение r: $X \to Y$ такие, что

$$f(\hat{x}+h) = f(\hat{x}) + f'(\hat{x})[h] + r(h). \qquad (1)$$

где $\|r(h)\|_Y = o(\|h\|_X)$ при $\|h\|_X \to 0$. Оператор $f'(\hat{x})$ называется *производной Фреше*. Это разложение можно кратко записать так:

$$f(\hat{x}+h) = f(\hat{x}) + f'(\hat{x})[h] + o(h),$$

понимая $o(h)$ как элемент пространства Y, для которого $\|o(h)\| = o(\|h\|)$ при $\|h\| \to 0$. Через $f'(\hat{x})[h]$ обозначено значение отображения $f'(\hat{x})$ на элементе h. Если в каждой точке x открытого множества U отображение $f \in D(x)$ и отображение $x \to f'(x)$ непрерывны, то пишем $f \in C^1(U)$. Ясно, что из дифференцируемости по Фреше отображения f в точке $\hat{x}$ следует дифференцируемость различаются.

На языке ε–δ определение дифференцируемости по Фреше отображения f в точке $\hat{x}$ формулируется так: существует оператор $f'(\hat{x}) \in L(X,Y)$ такой, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, при котором для любого $\|h\| < \delta$ выполняется неравенство

$$\left\| f(\hat{x}+h) - f(\hat{x}) - f'(\hat{x})[h] \right\|_Y \leqslant \varepsilon \|h\|_X.$$

Из (1) следует, что производная Фреше определена однозначно, ибо равенство $\Lambda_1 h - \Lambda_2 h = o(h)$ для линейных непрерывных операторов Λ_1 и Λ_2 возможно лишь при $\Lambda_1 = \Lambda_2$.

5.2.5. Строгая дифференцируемость

Во многих задачах конечномерного и бесконечномерного анализа дифференцируемости по Фреше в точке недостаточно для получения содержательного результата. Это побуждает к следующему усилению дифференцируемости в точке.

Пусть отображение f дифференцируемо по Фреше в точке $\hat{x}$. Оно называется *строго дифференцируемым в точке* $\hat{x}$ (при этом пишут $f \in SD(\hat{x})$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех x_1 и x_2, удовлетворяющих неравенствам $\|x_1 - \hat{x}\| < \delta$, $\|x_2 - \hat{x}\| < \delta$, выполнено неравенство

$$\left\| f(x_1) - f(x_2) - f'(\hat{x})[x_1 - x_2] \right\|_Y \leqslant \varepsilon \|x_1 - x_2\|_X.$$

5.2.6. Частные производные

Пусть X, Y, Z — нормированные пространства. Рассмотрим отображение F: $X \times Y \to Z$, $(\hat{x},\hat{y}) \in X \times Y$. Если отображение $x \to F(x,\hat{y})$ дифференцируемо в точке $\hat{x}$ по Фреше, то его производная называется *частной производной по* x *отображения* F *в точке* $(\hat{x},\hat{y})$ и обозначается $F'_x(\hat{x},\hat{y})$ или $\dfrac{\partial F_x(\hat{x},\hat{y})}{\partial x}$. Аналогично определяется частная производная по y $F'_y(\hat{x},\hat{y}) = \dfrac{\partial F_y(\hat{x},\hat{y})}{\partial y}$.

5.2.7. Производные высших порядков

Дадим теперь определение второй производной Фреше. Если отображение f: $X \to Y$ дифференцируемо в каждой точке $x \in X$, то определено отображение $x \to f'(x)$ пространства X в пространство $L(X,Y)$. Поскольку $L(X,Y)$ также является нормированным пространством, то можно ставить вопрос о существовании *второй производной*

$$f''(\hat{x}) = (f')'(\hat{x}) \in L(X, L(X,Y)).$$

Для $h_1 \in X$ оператор $f''(\hat{x})[h_1] \in L(X,Y)$. Возьмем $h_2 \in X$,. тогда определено $f''(\hat{x})[h_1,h_2] = f''(\hat{x})[h_1][h_2] \in Y$. Таким образом, определено линейное по каждому аргументу отображение $f''(\hat{x})$: $X \times X \to Y$. Аналогично определяются производные высших порядков.

Теорема (о смешанных производных). [АТФ, с. 156.] *Если отображение* $f \in D^2(\hat{x})$ *дважды дифференцируемо в точке* $\hat{x}$, *то*

$$f''(\hat{x})[h_1,h_2] = f''(\hat{x})[h_2,h_1] \quad \forall\, h_1,h_2 \in X.$$

Замечание. Можно считать, что отображения определены не на всем пространстве, а в окрестности рассматриваемых точек.

5.2.8. Контрпримеры на дифференцируемость

Приведем несколько контрпримеров, показывающих, что введенные понятия дифференцируемости действительно различны.

Пример 1. Непрерывная функция не имеет в фиксированной точке производной ни по какому направлению:

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad \hat{x} = 0.$$

Пример 2. Непрерывная функция имеет в фиксированной точке производную по всем направлениям, но не имеет в этой точке вариации по Лагранжу:

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = |x|, \quad \hat{x} = 0.$$

Пример 3. Отображение имеет в фиксированной точке вариацию по Лагранжу, непрерывно в этой точке, но не имеет в этой точке производной Гато.

Определим отображение в полярных координатах $x = (x_1, x_2) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ по формуле:

$$f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, \quad f(x) = r\cos 3\varphi, \quad \hat{x} = 0.$$

(Нетрудно проверить, что вариация по Лагранжу $\delta f(\hat{x}, h)$ не является линейным оператором по h.)

Пример 4. Отображение f имеет в фиксированной точке производную Гато, но не имеет в этой точке производной Фреше:

$$f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x_2 = x_1^2,\ x_1 > 0, \\ 0, & \text{в остальных случаях}, \end{cases} \qquad \hat{x} = (0,0).$$

($\delta f(\hat{x}, h) \equiv 0 \Rightarrow$ производная Гато $f'_{\mathrm{G}}(\hat{x}) = 0$, отображение f разрывно в точке $\hat{x} = (0,0)$. Функция, дифференцируемая по Фреше, непрерывна в точке дифференцируемости (легко следует из определения).)

Пример 5. Функция имеет в фиксированной точке производную Фреше, но не строго дифференцируема в этой точке:

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ рационально}, \\ 0, & \text{иррационально}, \end{cases} \qquad \hat{x} = 0.$$

(Эта функция имеет разрывы в любой окрестности нуля, а строго дифференцируемая функция непрерывна в некоторой окрестности $\hat{x}$.)

5.3. Некоторые теоремы дифференциального исчисления в нормированных пространствах

Приведем несколько теорем, наиболее часто используемых для решения экстремальных задач.

5.3.1. Теорема о суперпозиции

Теорема. *Пусть X, Y, Z — линейные нормированные пространства, $\varphi\colon X \to Y$, $\psi\colon Y \to Z$, $\varphi(\hat{x}) = \hat{y}$, $f = \psi \circ \varphi\colon X \to Z$ — суперпозиция отображений φ и ψ. Тогда, если ψ дифференцируемо по Фреше в точке $\hat{y}$, а φ в точке $\hat{x}$ дифференцируемо по Фреше (дифференцируемо по Гато, имеет вариацию по Лагранжу), то f обладает в точке $\hat{x}$ тем же свойством, что и φ, и при этом соответственно*

$$f'(\hat{x}) = \psi'(\hat{y}) \circ \varphi'(\hat{x}),$$

$$f'_{\mathrm{G}}(\hat{x}) = \psi'(\hat{y}) \circ \varphi'_{\mathrm{G}}(\hat{x}),$$

$$\delta f(\hat{x}, h) = \psi'(\hat{y})\big[\delta\varphi(\hat{x}, h)\big] \quad \forall\, h \in X.$$

Если $\psi \in SD(\hat{y})$ строго дифференцируемо в $\hat{y}$, а $\varphi \in SD(\hat{x})$ строго дифференцируемо в $\hat{x}$, то $f \in SD(\hat{x})$ строго дифференцируемо в $\hat{x}$.

(Теорема о суперпозиции не имеет, вообще говоря, места, если ψ дифференцируемо лишь по Гато.)

Доказательство. Рассмотрим подробно два крайних случая — вариацию по Лагранжу и строгую дифференцируемость.

А) *Вариация по Лагранжу.* По определению производной Фреше в точке $\hat{y}$

$$\psi(y) = \psi(\hat{y}) + \psi'(\hat{y})[y - \hat{y}] + o(y - \hat{y}).$$

Следовательно,

$$\delta f(\hat{x}, h) := \lim_{\lambda\to 0} \frac{f(\hat{x} + \lambda h) - f(\hat{x})}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\psi\big(\varphi(\hat{x} + \lambda h)\big) - \psi(\hat{y})}{\lambda} =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \frac{\psi'(\hat{y})\big[\varphi(\hat{x} + \lambda h) - \hat{y}\big] + o\big(\varphi(\hat{x} + \lambda h) - \hat{y}\big)}{\lambda} =$$

$$= \psi'(\hat{y})\left[\lim_{\lambda\to 0} \frac{\varphi(\hat{x} + \lambda h) - \hat{y}}{\lambda}\right] + \lim_{\lambda\to 0} \frac{o\big(\varphi(\hat{x} + \lambda h) - \hat{y}\big)}{\lambda} =$$

$$= \psi'(\hat{y})\big[\delta\varphi(\hat{x}, h)\big] + \lim_{\lambda\to 0} \frac{o\big(\varphi(\hat{x} + \lambda h) - \hat{y}\big)}{\|\varphi(\hat{x} + \lambda h) - \hat{y}\|} \cdot \lim_{\lambda\to 0} \frac{\|\varphi(\hat{x} + \lambda h) - \hat{y}\|}{\lambda} =$$

$$= \psi'(\hat{y})\big[\delta\varphi(\hat{x}, h)\big] + 0 \cdot \|\delta\varphi(\hat{x}, h)\| = \psi'(\hat{y})\big[\delta\varphi(\hat{x}, h)\big],$$

что и доказывает формулу для вариации по Лагранжу суперпозиции отображений.

В) *Строгая дифференцируемость.* Так как $\varphi \in SD(\hat{x})$, $\psi \in SD(\hat{y})$, то для любых $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, найдутся такие $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, что из неравенств $\|x_i - \hat{x}\| < \delta_1$, $\|y_i - \hat{y}\| < \delta_2$, $i = 0, 1$, следуют неравенства

$$\big\|\varphi(x_1) - \varphi(x_2) - \varphi'(\hat{x})[x_1 - x_2]\big\|_Y \leqslant \varepsilon_1\|x_1 - x_2\|_X. \qquad (1)$$

$$\big\|\psi(y_1) - \psi(y_2) - \psi'(\hat{y})[y_1 - y_2]\big\|_Z \leqslant \varepsilon_2\|y_1 - y_2\|_Y. \qquad (2)$$

Положим $\delta = \min\Big\{\dfrac{\delta_1, \delta_2}{\varepsilon_1 + \|\varphi'(\hat{x})\|}\Big\}$. Если теперь $\|x_i - \hat{x}\| < \delta$, $i = 0, 1$, то в силу (1)

$$\big\|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\big\| \leqslant \varepsilon_1\|x_1 - x_2\| + \big\|\varphi'(\hat{x})[x_1 - x_2]\big\| \leqslant \leqslant \big(\varepsilon_1 + \big\|\varphi'(\hat{x})\big\|\big)\|x_1 - x_2\|. \qquad (3)$$

Полагая в этом неравенстве поочередно $x_i = \hat{x}$, $i = 0, 1$, получаем

$$\big\|\varphi(x_i) - \varphi(\hat{x})\big\| = \big\|\varphi(x_i) - \hat{y}\big\| \leqslant \big(\varepsilon_1 + \big\|\varphi'(\hat{x})\big\|\big)\delta \leqslant \delta_2.$$

Значит, для $y_i = \varphi(x_i)$ справедливо неравенство (2). По неравенству треугольника для норм

$$\begin{aligned} &\big\|f(x_1) - f(x_2) - \psi'(\hat{y})\big[\varphi'(\hat{x})[x_1 - x_2]\big]\big\| \leqslant \big\|\psi(\varphi(x_1)) - \psi(\varphi(x_2)) - \\ &- \psi'(\hat{y})\big[\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\big]\big\| + \big\|\psi'(\hat{y})\big[\varphi(x_1) - \varphi(x_2) - \varphi'(\hat{x})[x_1 - x_2]\big]\big\| \overset{(2)}{\leqslant} \\ &\leqslant \varepsilon_2\big\|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\big\| + \big\|\psi'(\hat{y})\big\| \cdot \big\|\varphi(x_1) - \varphi(x_2) - \varphi'(\hat{x})[x_1 - x_2]\big\| \leqslant \\ &\overset{(3),(1)}{\leqslant} \varepsilon_2\big(\varepsilon_1 + \big\|\varphi'(\hat{x})\big\|\big)\|x_1 - x_2\| + \big\|\psi'(\hat{y})\big\|\varepsilon_1\|x_1 - x_2\| = \\ &= \big(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\big\|\varphi'(\hat{x})\big\| + \varepsilon_1\big\|\psi'(\hat{y})\big\|\big)\|x_1 - x_2\| \leqslant \varepsilon\|x_1 - x_2\|, \end{aligned}$$

это и означает, что $f \in SD(\hat{x})$. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ подберем $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\big\|\varphi'(\hat{x})\big\| + \varepsilon_1\big\|\psi'(\hat{y})\big\| < \varepsilon.$$

По этим $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ найдем $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, так, чтобы имели место соотношения (1) и (2).

Полагая в этих рассуждениях $x_2 = \hat{x}$, $x_1 = \hat{x} + h$, мы получим доказательство теоремы для случая дифференцируемости φ по Фреше. Доказательство теоремы для случая дифференцируемости φ по Гато получается анализом уже доказанной теоремы для вариации по Лагранжу суперпозиции отображений. ■

5.3.2. Формула Тейлора

Теорема. [АТФ, с. 159] *Пусть отображение $f \in D^n(\hat{x})$ n раз дифференцируемо по Фреше в точке $\hat{x}$. Тогда имеет место разложение в ряд Тейлора*

$$f(\hat{x} + h) = f(\hat{x}) + f'(\hat{x})[h] + \frac{1}{2}f''(\hat{x})[h, h] + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(\hat{x})[h, \ldots, h] + r(h),$$

где $\|r(h)\| = o(\|h\|^n)$ при $h \to 0$.

5.3.3. Теорема о среднем

Хорошо известно, что для числовых функций одного переменного справедлива теорема Лагранжа, называемая иногда также теоремой о среднем значении или формулой конечных приращений:

Теорема Лагранжа. *Если функция $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема в интервале (a, b), то существует точка $c \in (a, b)$ такая, что*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \qquad (*)$$

Замечание 1. *Нетрудно убедиться, что формула $(*)$ остается справедливой и для числовых функций $f(x)$, аргумент которых принадлежит произвольному линейному нормированному пространству. Дифференцируемость понимается в смысле Гато.*

Доказательство. Полагая $\varphi(t) := f(a + t(b - a))$, мы сводим доказательство к случаю функции одной переменной. ■

В этом случае $[a, b] = \big\{x \mid x = a + t(b - a),\ 0 \leqslant t \leqslant 1\big\}$. Аналогично определяется интервал (a, b).

Замечание 2. *Для векторнозначных функций теорема Лагранжа не верна.*

Пример. Пусть $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $f(x) = (\sin x, -\cos x)$. Тогда $f'(x)[h] = (\cos x, \sin x)[h] = (h\cos x, h\sin x)$, $h \in \mathbf{R}$. В то же время для любого c

$$f(2\pi) - f(0) = 0 \neq f'(c)[2\pi - 0] = (2\pi\cos c, 2\pi\sin c).$$

Значит, формула $(*)$ для функции f не имеет места.

Отметим, что в анализе, как правило, используется не сама формула $(*)$, а вытекающая из нее оценка

$$|f(b) - f(a)| \leqslant \max_{c \in (a, b)} |f'(c)| \cdot |b - a|.$$

Покажем, что в этом более слабом виде утверждение распространяется уже на случай произвольных нормированных пространств. По традиции оно сохраняет название «теорема о среднем», хотя, конечно, его следовало бы назвать «теоремой об оценке конечного приращения».

Теорема о среднем. *Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, отображение $f\colon X \to Y$ дифференцируемо по Гато в каждой точке отрезка $[a, b]$. Тогда*

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \max_{c \in (a, b)} \|f'_G(c)\| \cdot \|b - a\|.$$

Доказательство. По лемме Банаха (см. п. 5.4) для любого $y \in Y$, а значит, и для $y = f(b) - f(a)$ найдется элемент $y^* \in Y^*$ такой, что $\|y^*\| = 1$ и $\langle y^*, y\rangle = \|y\|$, т. е. $\langle y^*, f(b) - f(a)\rangle = \|f(b) - f(a)\|$.

Обозначим $\varphi(t) = \langle y^*, f(a + t(b - a))\rangle$. Поскольку y^* — линейный непрерывный функционал, а отображение f в каждой точке отрезка $[a, b]$ имеет производную Гато, то по теореме о суперпозиции

$$\varphi'(t) = \langle y^*, f'_G(a + t(b - a))[b - a]\rangle \quad \forall\, t \in [0, 1].$$

Из дифференцируемости функции φ следует ее непрерывность на отрезке $[0, 1]$, и, следовательно, к ней можно применить формулу Лагранжа: $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta)$, $\theta \in (0, 1)$. Поэтому

$$\begin{aligned}\|f(b) - f(a)\| &= \langle y^*, f(b) - f(a)\rangle = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta) = \\ &= \langle y^*, f'_G(a + \theta(b - a))[b - a]\rangle \leqslant \|f'_G(a + \theta(b - a))[b - a]\| \leqslant \\ &\leqslant \|f'_G(a + \theta(b - a))\| \cdot \|b - a\| \leqslant \max_{c \in (a, b)} \|f'_G(c)\| \cdot \|b - a\|.\end{aligned}$$ ■

Следствие 1. *Пусть выполнены все условия теоремы о среднем и $\Lambda \in L(X, Y)$. Тогда*

$$\|f(b) - f(a) - \Lambda(b - a)\| \leqslant \max_{c \in (a, b)} \|f'_G(c) - \Lambda\| \cdot \|b - a\|.$$

Доказательство. Надо применить теорему о среднем к отображению $g(x) = f(x) - \Lambda$. ■

Следствие 2. *Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, отображение $F\colon X \to Y$ дифференцируемо по Гато в некоторой окрестности точки $\hat{x}$, отображение $x \to f'_G(x)$ непрерывно в точке $\hat{x}$. Тогда отображение f строго дифференцируемо в $\hat{x}$.*

Доказательство. В силу непрерывности отображения $x \to f'_G(x)$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\|f'_G(x) - f'_G(\hat{x})\| < \varepsilon$ при $\|x - \hat{x}\| < \delta$.

В силу выпуклости шара $B\colon = \mathring{B}(\hat{x}, \delta) = \{x \mid \|x - \hat{x}\| < \delta\}$ из условия $x_1, x_2 \in B$ следует, что $[x_1, x_2] \in B$. По следствию 1 теоремы о среднем с $\Lambda = f'_G(\hat{x})$

$$\begin{aligned}&\|f(x_1) - f(x_2) - f'_G(\hat{x})[x_1 - x_2]\| \leqslant \\ &\qquad\leqslant \max_{x \in (x_1, x_2)} \|f'_G(x) - f'_G(\hat{x})\| \cdot \|x_1 - x_2\| \leqslant \varepsilon\|x_1 - x_2\|,\end{aligned}$$

что означает строгую дифференцируемость отображения f в точке $\hat{x}$. ■

Следствие 2 показывает, что при проверке дифференцируемости конкретного функционала достаточно доказать существование производной Гато и проверить ее непрерывность. Это гарантирует строгую дифференцируемость и тем более существование производной Фреше.

5.3.4. Теорема о полном дифференциале

Теорема. *Пусть X, Y, Z — линейные нормированные пространства, отображение $F\colon X \times Y \to Z$ имеет в каждой точке (x, y) из некоторой окрестности точки $(\hat{x}, \hat{y}) \in X \times Y$ частные производные $F_x(x, y)$ и $F_y(x, y)$ в смысле Гато, являющиеся непрерывными в точке $(\hat{x}, \hat{y})$. Тогда $F \in SD(\hat{x}, \hat{y})$ строго дифференцируемо в той же точке и при этом*

$$F'(\hat{x}, \hat{y})[\xi, \eta] = F_x(\hat{x}, \hat{y})[\xi] + F_y(\hat{x}, \hat{y})[\eta].$$

Доказательство. В силу непрерывности отображений $F_x(x, y)$ и $F_y(x, y)$ в точке $(\hat{x}, \hat{y})$ для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ такое, что для любой точки (x, y) из «прямоугольной» окрестности $V\colon = \mathring{B}(\hat{x}, \delta) \times \mathring{B}(\hat{y}, \delta)$ точки $(\hat{x}, \hat{y})$ выполняются неравенства

$$\|F_x(x, y) - F_x(\hat{x}, \hat{y})\| < \varepsilon, \quad \|F_y(x, y) - F_y(\hat{x}, \hat{y})\| < \varepsilon. \qquad (*)$$

Легко видеть, что если точки (x_1, y_1), (x_2, y_2) лежат в V, то и точка $(x_2, y_1) \in V$ и, более того, оба отрезка $[(x_1, y_1), (x_2, y_1)]$, $[(x_2, y_1), (x_2, y_2)]$ содержатся в V. Поэтому отображения $x \to F(x, y_1)$ и $y \to F(x_2, y)$ дифференцируемы по Гато: первое отображение имеет производную $F_x(x, y_1)$ на отрезке $[x_1, x_2]$, второе $F_y(x_2, y)$ на $[y_1, y_2]$. Применяя следствие 1 теоремы о среднем к этим отображениям, получаем в силу $(*)$

$$\begin{aligned}&\|F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2) - F_x(\hat{x}, \hat{y})[x_1 - x_2] - F_y(\hat{x}, \hat{y})[y_1 - y_2]\| = \\ &\quad = \|F(x_1, y_1) - F(x_2, y_1) - F_x(\hat{x}, \hat{y})[x_1 - x_2] + \\ &\quad + F(x_2, y_1) - F(x_2, y_2) - F_y(\hat{x}, \hat{y})[y_1 - y_2]\| \leqslant \\ &\quad \leqslant \max_{x \in (x_1, x_2)} \|F_x(x, y_1) - F_x(\hat{x}, \hat{y})\| \cdot \|x_1 - x_2\| + \\ &\quad + \max_{y \in (y_1, y_2)} \|F_y(x_2, y) - F_y(\hat{x}, \hat{y})\| \cdot \|y_1 - y_2\| \leqslant \\ &\quad \leqslant \varepsilon\|x_1 - x_2\| + \varepsilon\|y_1 - y_2\|\end{aligned}$$

для любых $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V$, что и означает строгую дифференцируемость отображения F в точке $(\hat{x}, \hat{y})$. ■

5.4. Дополнительные сведения из алгебры и функционального анализа

В этом пункте приводятся дополнительные сведения из алгебры и функционального анализа, которые понадобятся для доказательства теорем об условиях экстремума в гладких экстремальных задачах в нормированных пространствах.

Определение. *Аннулятором* $A^{\perp}$ множества A линейного нормированного пространства X называется множество линейных непрерывных функционалов x^*, для которых $\langle x^*, x\rangle = 0 \ \forall\, x \in A$:

$$A^{\perp} := \left\{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x\rangle = 0 \quad \forall\, x \in A\right\}.$$

Отметим, что $A^{\perp}$ всегда содержит $0 \in X^*$.

Лемма о нетривиальности аннулятора. *Пусть L — замкнутое собственное ($L \neq X$) подпространство линейного нормированного пространства X. Тогда аннулятор $L^{\perp}$ содержит ненулевой элемент $x^* \in X^*$.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку $\hat{x} \notin L$. По второй теореме отделимости существует линейный непрерывный функционал $x^* \in X^*$, строго разделяющий $\hat{x}$ и L (L — подпространство линейного пространства и, следовательно, выпукло)

$$\max_{x \in L} \langle x^*, x\rangle < \langle x^*, \hat{x}\rangle.$$

Если бы существовало $x_0 \in L$, для которого $\langle x^*, x_0\rangle \neq 0$, то поскольку $\alpha x_0 \in L$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$, было бы

$$\max_{x \in L} \langle x^*, x\rangle \geqslant \max_{\alpha \in \mathbb{R}} \langle x^*, \alpha x_0\rangle = +\infty.$$

Это не так. Следовательно, $\langle x^*, x\rangle = 0 \ \forall\, x \in L$ и, поэтому $x^* \in L^{\perp}$. ■

Далее нам понадобятся следующие две теоремы из функционального анализа.

Теорема Банаха об открытости. [ГТ, с. 109] *Пусть X, Y — банаховы пространства, Λ — непрерывный линейный оператор из X в Y, являющийся эпиморфизмом ($\Lambda\colon X \overset{\text{на}}{\to} Y$). Тогда образ каждого открытого множества в X открыт в Y.*

Теорема Банаха об обратном операторе. [КФ, с. 213] *Пусть X, Y — банаховы пространства, Λ — непрерывный линейный оператор из X в Y, являющийся эпиморфизмом и $\operatorname{Ker}\Lambda = 0$. Тогда существуют обратный оператор $\Lambda^{-1}\colon Y \to X$, так же линейный и непрерывный.*

Лемма Банаха. [ГТ, с. 109] *X — линейное нормированное пространство, $x_0 \in X$. Тогда существует линейный непрерывный функционал $x^* \in X^*$ такой, что $\|x^*\| = 1$, $\langle x^*, x_0\rangle = \|x_0\|$.*

Лемма Банаха является следствием из известной теоремы Хана—Банаха о продолжении линейного функционала.

Лемма о правом обратном отображении. *Пусть X, Y — банаховы пространства, Λ — непрерывный линейный оператор из X в Y, являющийся эпиморфизмом. Тогда существуют отображение $M\colon Y \to X$* (вообще говоря, разрывное и нелинейное) *и константа $C > 0$ такие, что*

$$\Lambda \circ M = I_Y, \quad \|My\| \leqslant C\|y\| \quad \forall\, y \in Y.$$

Доказательство. Обозначим $B_X := \left\{x \in X \mid \|x\| < 1\right\}$ — открытый шар в X радиуса 1. По теореме Банаха об открытости образ открытого множества ΛB_X содержит открытый шар $\delta B_Y := \left\{y \in Y \mid \|y\| < \delta\right\}$, т. е. для любого $y \in \delta B_Y$ найдется $x(y)$ такой, что $\Lambda x(y) = y$, $\|x(y)\| < 1$. Обозначим $My := x\left(\frac{\delta y}{2\|y\|}\right)\frac{2\|y\|}{\delta}$. Тогда из определения M имеем:

$$\Lambda \circ My = \Lambda\left(x\left(\frac{\delta y}{2\|y\|}\right)\frac{2\|y\|}{\delta}\right) = \frac{\delta y}{2\|y\|}\frac{2\|y\|}{\delta} = y, \quad \|My\| < \frac{2}{\delta}\|y\|.$$

■

Лемма о замкнутости образа. *Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, $A\colon X \to Y$, $B\colon X \to Z$ — линейные непрерывные операторы, подпространство $\operatorname{Im} A$ замкнуто в Y, подпространство $B\operatorname{Ker} A$ замкнуто в Z, $C\colon X \to Y \times Z$, $Cx := (Ax, Bx)$. Тогда C — линейный непрерывный оператор и подпространство $\operatorname{Im} C$ замкнуто в $Y \times Z$.*

Доказательство. Очевидно, что оператор C линеен и непрерывен. Докажем замкнутость его образа. Замкнутое подпространство $\widetilde{Y} = \operatorname{Im} A$ банахового пространства Y — банахово и по определению $A\colon X \to \widetilde{Y}$ — эпиморфизм. По лемме о правом обратном отображении существуют оператор $M\colon \widetilde{Y} \to X$ и константа $K > 0$ такие, что

$$A \circ M = I_{\widetilde{Y}}, \quad \|My\| \leqslant K\|y\| \quad \forall\, y \in \widetilde{Y}.$$

Пусть $(y, z) \in \overline{\operatorname{Im} C}$ принадлежит замыканию образа оператора C. Это означает, что найдется последовательность $\{x_n\}_{n \geqslant 1}$ такая, что $y = \lim Ax_n \in \widetilde{Y}$, $z = \lim Bx_n$. Положим $h_n := M(Ax_n - y)$, $z_n := B(x_n - h_n)$. Тогда по свойству оператора M, получим:

$$\|h_n\| = \left\|M(Ax_n - y)\right\| \leqslant K\|Ax_n - y\| \to 0,$$

$$A(x_n - h_n) = Ax_n - A(M(Ax_n - y)) = Ax_n - (Ax_n - y) = y.$$

Поэтому, $Bh_n \to 0$ и $\lim z_n = \lim B(x_n - h_n) = \lim Bx_n = z$, т.е. z принадлежит замыканию множества $\Sigma = \{\xi = Bx \mid Ax = y\}$. Это множество, как легко видеть, является сдвигом подпространства $B\operatorname{Ker} A$, следовательно, замкнуто. Итак, $z \in \overline{\Sigma} = \Sigma$. Это означает, что существует $x \in X$: $Ax = y$, $Bx = z$, т.е. $(y, z) \in \operatorname{Im} C$. ■

Лемма об аннуляторе ядра регулярного оператора. *Пусть X, Y — банаховы пространства, A: $X \to Y$ — линейный непрерывный эпиморфизм. Тогда* $(\operatorname{Ker} A)^{\perp} = \operatorname{Im} A^*$.

Доказательство.

A) Докажем, что $\operatorname{Im} A^* \subset (\operatorname{Ker} A)^{\perp}$. Возьмем $x^* \in \operatorname{Im} A^* \Leftrightarrow x^* = A^*y^*$. Тогда

$$\langle x^*, x\rangle = \langle A^*y^*, x\rangle \doteq \langle y^*, Ax\rangle = 0 \quad \forall\, x \in \operatorname{Ker} A.$$

Значит, $x^* \in (\operatorname{Ker} A)^{\perp}$, т.е. $\operatorname{Im} A^* \subset (\operatorname{Ker} A)^{\perp}$.

B) Докажем, что $(\operatorname{Ker} A)^{\perp} \subset \operatorname{Im} A^*$. Возьмем $x^* \in (\operatorname{Ker} A)^{\perp}$, т.е. $\langle x^*, x\rangle = 0$ $\forall\, x \in \operatorname{Ker} A$. Применим лемму о замкнутости образа для пространств X, Y, $Z = \mathbf{R}$ и отображений A, $Bx := \langle x^*, x\rangle$. Условия леммы выполняются: подпространство $\operatorname{Im} A = Y$ замкнуто в Y, подпространство $B\operatorname{Ker} A = \langle x^*, \operatorname{Ker} A\rangle = 0$ замкнуто в $Z = \mathbf{R}$. По лемме о замкнутости образа подпространство $\operatorname{Im} C = \operatorname{Im}(A, x^*)$ замкнуто в $Y \times Z = Y \times \mathbf{R}$. Подпространство $\operatorname{Im}(A, x^*)$ является собственным, так как точка $(0, 1) \notin \operatorname{Im}(A, x^*)$ (если $Ax = 0$, то $\langle x^*, x\rangle = 0 \neq 1$).

По лемме о нетривиальности аннулятора замкнутого собственного подпространства существует ненулевой линейный непрерывный функционал $(y^*, \lambda) \in \big(\operatorname{Im}(A, x^*)\big)^{\perp} \in (Y \times \mathbf{R})^* = Y^* \times \mathbf{R}$ такой, что

$$\big\langle (y^*, \lambda), \big(Ax, \langle x^*, x\rangle\big)\big\rangle = 0 \iff \langle y^*, Ax\rangle + \lambda\langle x^*, x\rangle = 0 \iff$$

$$\langle A^*y^*, x\rangle + \lambda\langle x^*, x\rangle = 0 \iff \langle A^*y^* + \lambda x^*, x\rangle = 0 \quad \forall\, x \in X.$$

Но $\lambda \neq 0$ (ибо иначе $\langle y^*, Ax\rangle = 0\ \forall\, x \in X \overset{AX=Y}{\Rightarrow} y^* = 0$ — противоречие). Тогда $x^* = A^*\big(-\frac{y^*}{\lambda}\big) \in \operatorname{Im} A^*$, т.е. $(\operatorname{Ker} A)^{\perp} \subset \operatorname{Im} A^*$. ■

Теорема об обратном отображении. *Пусть X, Z — банаховы пространства, F: $X \to Z$, $F(\hat{x}) = \hat{z}$. Если $F \in SD(\hat{x})$ и $F'(\hat{x})$ является эпиморфизмом, то существуют обратное отображение F^{-1}: $W \subset Z \to X$ некоторой окрестности W точки $\hat{z}$ и константа $K > 0$ такие, что $F^{-1}(\hat{z}) = \hat{x}$ и*

$$F\big(F^{-1}(z)\big) = z, \quad \big\|F^{-1}(z) - F^{-1}(\hat{z})\big\| \leqslant K\|z - \hat{z}\| \quad \forall\, z \in W.$$

Теорема Люстерника. *Пусть X, Z — банаховы пространства, F: $X \to Z$, $F \in SD(\hat{x})$, $F'(\hat{x})$ является эпиморфизмом. Тогда существуют отображение φ: $U \subset X \to X$ некоторой окрестности U точки $\hat{x}$ и число $K > 0$ такие, что*

$$F\big(x + \varphi(x)\big) = F(\hat{x}), \quad \big\|\varphi(x)\big\| \leqslant K\big\|F(x) - F(\hat{x})\big\| \quad \forall\, x \in U.$$

Доказательство этой теоремы основано на модифицированном методе Ньютона.

A) Не ограничивая общности, считаем, что $\hat{x} = 0$ и $F(\hat{x}) = 0$. По лемме о правом обратном операторе для оператора $F'(\hat{x})$: $X \overset{\text{на}}{\to} Z$ существуют отображение M: $Z \to X$ и константа $C > 1$ такие, что

$$F'(\hat{x}) \circ M = I_Z, \quad \|Mz\| \leqslant C\|z\| \quad \forall\, z \in Z.$$

$F \in SD(\hat{x})$, поэтому для $\varepsilon = \frac{1}{2C}$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\big\|F(x') - F(x'') - F'(\hat{x})(x' - x'')\big\| \leqslant \frac{1}{2C}\|x' - x''\| \tag{1}$$

при $\|x'\| < \delta$, $\|x''\| < \delta$. Отображение $F \in SD(\hat{x})$, поэтому F непрерывно в некоторой окрестности нуля. Выберем δ' столь малым, чтобы $\|x\| + C\|F(x)\| < \frac{\delta}{2}$ при $\|x\| < \delta'$. Положим для $x \in U$: $= \overset{o}{B}(0, \delta')$

$$\xi_{n+1} := \xi_n - M\big(F(\xi_n)\big), \quad n \geqslant 0, \quad \xi_0 = x. \tag{2}$$

B) Докажем по индукции, что $\|\xi_n\| < \delta$ $\forall\, n \geqslant 0$. Очевидно, что $\|\xi_0\| = \|x\| < \frac{\delta}{2}$. При $n = 1$ из (2) получаем оценку

$$\|\xi_1 - x\| = \big\|MF(x)\big\| \leqslant C\big\|F(x)\big\|, \tag{3}$$

откуда $\|\xi_1\| < \frac{\delta}{2}$.

Пусть $\|\xi_i\| < \delta$ при $i = 0, 1, \ldots, k$ $(k \geqslant 1)$. Выведем отсюда, что $\|\xi_{k+1}\| < \delta$. Для $i = 0, 1, \ldots, k$ из (2) имеем

$$F'(\hat{x})(\xi_{i+1} - \xi_i) + F(\xi_i) = 0, \tag{4}$$

откуда

$$\begin{aligned} &\|\xi_{i+1} - \xi_i\| \overset{(2)}{=} \big\|MF(\xi_i)\big\| \leqslant C\big\|F(\xi_i)\big\| \overset{(4)}{=} \\ &= C\big\|F(\xi_i) - F(\xi_{i-1}) - F'(\hat{x})(\xi_i - \xi_{i-1})\big\| \overset{(1)}{\leqslant} \frac{1}{2}\|\xi_i - \xi_{i-1}\| \Rightarrow \end{aligned} \tag{5}$$

$$\|\xi_{i+1} - \xi_i\| \leqslant \frac{1}{2^i}\|\xi_1 - x\| \overset{(3)}{\leqslant} \frac{1}{2^i}C\big\|F(x)\big\| < \frac{\delta}{2} \cdot \frac{1}{2^i}, \quad i = 1, \ldots, k. \tag{5'}$$

Отсюда в силу неравенства треугольника получаем

$$\begin{aligned}\|\xi_{k+1}\| &= \|\xi_{k+1}-\xi_k+\xi_k-\xi_{k-1}+\ldots+\xi_2-\xi_1+\xi_1\| \leqslant \\ &\leqslant \|\xi_{k+1}-\xi_k\|+\|\xi_k-\xi_{k-1}\|+\ldots+\|\xi_2-\xi_1\|+\|\xi_1\| < \\ &< \frac{\delta}{2}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k-1}}+\ldots+\frac{1}{2}\right)+\frac{\delta}{2}<\delta.\end{aligned}$$

Таким образом, мы получили, что $\|\xi_{k+1}\| < \delta$, откуда по индукции следует, что $\|\xi_n\| < \delta \ \forall\, n \geqslant 0$.

C) Из неравенств (5), (5′) следует, что

$$\begin{aligned}\|\xi_{n+m}-\xi_n\| &= \|\xi_{n+m}-\xi_{n+m-1}+\xi_{n+m-1}-\xi_{n+m-2}+\ldots+\xi_{n+1}-\xi_n\| \leqslant \\ &\leqslant \|\xi_{n+m}-\xi_{n+m-1}\|+\|\xi_{n+m-1}-\xi_{n+m-2}\|+\ldots+\|\xi_{n+1}-\xi_n\| \leqslant \\ &\leqslant \|\xi_{n+1}-\xi_n\|\left(\frac{1}{2^{m-1}}+\frac{1}{2^{m-2}}+\ldots+1\right) \leqslant \\ &\leqslant 2\|\xi_{n+1}-\xi_n\| \leqslant 2^{1-n}\|\xi_1-x\| \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty,\end{aligned}$$

т. е. $\{\xi_n\}_{n\geqslant 0}$ — фундаментальная последовательность и, значит, она сходится в силу банаховости X. Обозначим $\varphi(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n - x$. Поскольку

$$\begin{aligned}\|\xi_n-x\| &= \|\xi_n-\xi_{n-1}+\xi_{n-1}-\xi_{n-2}+\ldots+\xi_2-\xi_1+\xi_1-x\| \leqslant \\ &\leqslant \|\xi_n-\xi_{n-1}\|+\|\xi_{n-1}-\xi_{n-2}\|+\ldots+\|\xi_2-\xi_1\|+\|\xi_1-x\| \leqslant \\ &\overset{(5')}{\leqslant} \|\xi_1-x\|\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-2}}+\ldots+1\right) \leqslant 2\|\xi_1-x\|,\end{aligned}$$

то

$$\big\|\varphi(x)\big\| \leqslant 2\|\xi_1-x\| \overset{(3)}{\leqslant} 2C\big\|F(x)\big\| = K\big\|F(x)\big\|$$

и

$$\big\|x+\varphi(x)\big\| \leqslant \|x\|+\big\|\varphi(x)\big\| \leqslant \|x\|+2C\big\|F(x)\big\| < \delta.$$

$F\in SD(\hat{x})$, поэтому F непрерывно в некоторой окрестности $\hat{x}=0$, и, значит, что F непрерывно в точке $x+\varphi(x)$ и поэтому из (4)

$$F\big(x+\varphi(x)\big)=\lim_{n\to\infty}F(\xi_n) = -\lim_{n\to\infty}F'(\hat{x})(\xi_{n+1}-\xi_n)=0=F(\hat{x}).$$

■

Пусть X — нормированное пространство, M — некоторое его подмножество. Элемент $h\in M$ называется *односторонним касательным* (*полукасательным*) *вектором к множеству M в точке $\hat{x}\in X$*, если существуют $\varepsilon>0$ и отображение r: $[0,\varepsilon]\to X$, такие, что

a) $\hat{x}+th+r(t)\in M \ \forall\, t\in[0,\varepsilon]$;

b) $\|r(t)\|=o(t)$ при $t\to+0$.

Вектор h называется *касательным к множеству M в точке $\hat{x}$*, если векторы h и $-h$ являются односторонними касательными векторами к M в $\hat{x}$. Множество всех касательных векторов к M в точке $\hat{x}$ обозначается $T_{\hat{x}}M$, множество односторонних касательных векторов $T_{\hat{x}}^{+}M$. Очевидно, что $T_{\hat{x}}M$ и $T_{\hat{x}}^{+}M$ — конусы. Если множество $T_{\hat{x}}M$ является подпространством в X, то оно называется *касательным пространством к множеству M в точке $\hat{x}$*.

Во многих случаях, в том числе и представляющих значительный интерес для теории экстремальных задач, множество касательных векторов может быть найдено при помощи такого следствия из теоремы Люстерника.

Теорема (о касательном пространстве). *Пусть X, Z — банаховы пространства, F: $X\to Z$, $F\in SD(\hat{x})$, $F'(\hat{x})$ — эпиморфизм, $M=\{x\in X \mid F(x)=F(\hat{x})\}$. Тогда*

$$T_{\hat{x}}M=\operatorname{Ker}F'(\hat{x}).$$

Доказательство.

A) Пусть $h\in T_{\hat{x}}M$, тогда существуют $\varepsilon>0$ и отображение r: $[-\varepsilon,\varepsilon]\to X$, такие, что $\hat{x}+th+r(t)\in M \ \forall\, t\in[-\varepsilon,\varepsilon]$, $\big\|r(t)\big\|=o(t)$ при $t\to 0$. При малых t

$$F(\hat{x})=F\big(\hat{x}+th+r(t)\big)=F(\hat{x})+tF'(\hat{x})[h]+o(t).$$

Отсюда $tF'(\hat{x})[h]+o(t)=0$ и, значит, $F'(\hat{x})[h]=0$, т. е. $h\in\operatorname{Ker}F'(\hat{x})\Rightarrow T_{\hat{x}}M\subset\operatorname{Ker}F'(\hat{x})$.

B) Пусть $h\in\operatorname{Ker}F'(\hat{x})$. Положим $r(t)=\varphi(\hat{x}+th)$, где φ — отображение, построенное в теореме Люстерника. Тогда

$$\begin{aligned}&F\big(\hat{x}+th+r(t)\big)=F\big(\hat{x}+th+\varphi(\hat{x}+th)\big)=F(\hat{x}) \Leftrightarrow \hat{x}+th+r(t)\in M,\\ &\big\|r(t)\big\|=\big\|\varphi(\hat{x}+th)\big\|\leqslant K\big\|F(\hat{x}+th)-F(\hat{x})\big\|=\\ &\qquad =K\big\|tF'(\hat{x})[h]+o(t)\big\|=K\big\|o(t)\big\|=o(t),\end{aligned}$$

т. е. $h\in T_{\hat{x}}M\Rightarrow\operatorname{Ker}F'(\hat{x})\subset T_{\hat{x}}M$. ■

5.5. Задачи

Найти производные Фреше следующих отображений.

В задачах 5.1–5.6: H — гильбертово пространство.

5.1. $f\colon H \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle a, x\rangle$, $a \in H$.

5.2. $f\colon H \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle x, x\rangle$.

5.3. $f\colon H \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

5.4. $f\colon H \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle x, x\rangle^{3/2}$.

5.5. $f\colon H \to H$, $f(x) = x\|x\|$

5.6. $f\colon H \setminus \{0\} \to H$, $f(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$

5.7. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1x_2, x_1^2 + x_2^2)$, $\hat{x} = (1, 2)$.

5.8. $f\colon C([0,1]) \to \mathbb{R}$, $f(x(\cdot)) = \int\limits_0^1 x^3(t)\,dt$.

5.9. $f\colon C([0,1]) \to \mathbb{R}$, $f(x(\cdot)) = \left(\int\limits_0^1 x(t)\,dt\right)^3$.

5.10. $f\colon C([0,1]) \to \mathbb{R}$, $f(x(\cdot)) = \left(\int\limits_0^1 x^2(t)\,dt\right)^3$.

5.11. $f\colon C([0,1]) \to \mathbb{R}$, $f(x(\cdot)) = x(0)$.

5.12. $f\colon C([0,1]) \to \mathbb{R}$, $f(x(\cdot)) = x(0)x(1)$.

5.13. $f\colon C([0,1]) \to C([0,1])$, $f(x(\cdot)) = x(\cdot)x(1)$.

5.14. $f\colon C([0,1]) \to \mathbb{R}$, $f(x(\cdot)) = \sin x(0)$.

5.15. $f\colon C([0,1]) \to \mathbb{R}$, $f(x(\cdot)) = \sin x(0)\cos x(1)$.

5.16. $f\colon C([0,1]) \to \mathbb{R}$, $f(x(\cdot)) = x(1)^{x(0)}$ $(\hat{x}(t) > 0\ \forall\, 0 \leqslant t \leqslant 1)$.

5.17. $f\colon C([0,1]) \to \mathbb{R}$, $f(x(\cdot)) = (\sin\hat{x}(0))^{\cos\hat{x}(1)}$.

В задачах 5.18–5.20 указать точки, где функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ не дифференцируемы по Фреше.

5.18. $f(x) = \left(\sum\limits_{j=1}^n x_j^2\right)^{1/2}$.

5.19. $f(x) = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j|$.

5.20. $f(x) = \sum\limits_{j=1}^n |x_j|$.

§ 6. Гладкая задача без ограничений

В этом параграфе даются необходимые и достаточные условия экстремума функционалов в нормированных пространствах.

6.1. Постановка задачи

Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ — отображение линейного нормированного пространства X во множество действительных чисел (в этом случае обычно говорим *функционал* на пространстве X), обладающее некоторой гладкостью, т. е. определенными свойствами дифференцируемости. *Гладкой задачей без ограничений* называется задача об отыскании экстремумов этого функционала:

$$f(x) \to \mathrm{extr}.$$

6.2. Необходимые условия I порядка

Теорема 1 (аналог теоремы Ферма в нормированных пространствах). *Пусть $\hat{x} \in \mathrm{locextr}\, f$ — точка локального экстремума функционала f и функционал f дифференцируем по Фреше (имеет вариацию по Лагранжу) в точке $\hat{x}$. Тогда*

$$f'(\hat{x}) = 0 \qquad (\delta f(\hat{x}, h) = 0 \quad \forall\, h \in X)$$

Доказательство. Возьмем произвольный, но фиксированный элемент $h \in X$. Рассмотрим функцию $\varphi(\lambda) = f(\hat{x} + \lambda h)$. Поскольку $\hat{x} \in \mathrm{locextr}\, f$, то $0 \in \mathrm{locextr}\,\varphi$ — локальный экстремум функции φ. По теореме Ферма для функций одной переменной $\varphi'_\lambda(0) = 0$. По определению вариации по Лагранжу это эквивалентно тому, что $\delta f(\hat{x}, h) = 0$. В силу произвольности h $\delta f(\hat{x}, h) = 0\ \forall\, h \in X$.

Если функционал f дифференцируем по Фреше в точке $\hat{x}$, то в этой точке он имеет вариацию по Лагранжу и $f'(\hat{x})[h] = \delta f(\hat{x}, h)$. Поскольку из уже доказанного следует, что эта вариация $\delta f(\hat{x}, \cdot) = 0$, то и $f'(\hat{x}) = 0$ в силу определения дифференцируемости по Фреше. ■

6.3. Необходимые и достаточные условия II порядка

Теорема 2. *Пусть функционал $f \in D^2(\hat{x})$ дважды дифференцируем в точке $\hat{x}$.*

Необходимые условия экстремума: *если $\hat{x} \in \mathrm{locmin}\,(\max) f$, то*

$$f'(\hat{x}) = 0, \quad f''(\hat{x})[h, h] \geqslant 0 \quad (f''(\hat{x})[h, h] \leqslant 0) \quad \forall\, h \in X.$$

Достаточные условия экстремума: *если $f'(\hat{x}) = 0$ и*

$$f''(\hat{x})[h, h] \geqslant \alpha\|h\|^2 \quad (f''(\hat{x})[h, h] \leqslant -\alpha\|h\|^2) \quad \forall\, h \in X \qquad (*)$$

при некотором $\alpha > 0$, то $\hat{x} \in \mathrm{locmin}\,(\max) f$.

Доказательство. По формуле Тейлора

$$f(\hat{x}+h)=f(\hat{x})+f'(\hat{x})[h]+\frac{1}{2}f''(\hat{x})[h,h]+r(h),\quad r(h)=o(\|h\|^2).$$

Докажем теорему для случая минимума. Случай максимума аналогичен.

Необходимость. Поскольку $\hat{x}\in\operatorname{locmin}f$, то во-первых по теореме Ферма $f'(\hat{x})=0$, во-вторых $f(\hat{x}+\lambda h)-f(\hat{x})\geqslant 0$ при достаточно малых λ. Поэтому в силу формулы Тейлора

$$f(\hat{x}+\lambda h)-f(\hat{x})=\frac{\lambda^2}{2}f''(\hat{x})[h,h]+r(\lambda h)\geqslant 0\quad \left(r(\lambda h)=o(|\lambda|^2)\right)$$

при малых λ. Разделим обе части последнего неравенства на λ^2 и устремим λ к нулю. Поскольку $\frac{r(\lambda h)}{\lambda^2}\to 0$, то отсюда

$$f''(\hat{x})[h,h]\geqslant 0\quad \forall\, h\in X.$$

Достаточность. Так как $f'(\hat{x})=0$, то по формуле Тейлора в силу заданного условия $f''(\hat{x})[h,h]\geqslant\alpha\|h\|^2$ имеем:

$$f(\hat{x}+h)-f(\hat{x})=\frac{1}{2}f''(\hat{x})[h,h]+r(h)\geqslant\frac{\alpha}{2}\|h\|^2+r(h)\geqslant 0$$

при достаточно малых h, так как $r(h)=o(\|h\|^2)$. Следовательно, $\hat{x}\in\operatorname{locmin}f$. ■

Условие $(*)$ называется условием *строгой положительности* (*отрицательности*) второй производной Фреше функционала f.

Отметим, что в конечномерных пространствах условие положительной определенности симметричной матрицы A гарантирует строгую положительность матрицы A (и, значит, является достаточным условием минимума в стационарной точке). В бесконечномерных пространствах это не так.

Пример. Пусть $f\colon l_2\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x_n^2}{n^3}-x_n^4\right)$. Тогда точка $\hat{x}=0$ является стационарной ($f'(0)=0$), а второй дифференциал f в нуле — положительно определенным

$$f''(0)[h,h]=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_n^2}{n^3}>0\quad\forall\, h\neq 0.$$

Но вместе с тем $0\notin\operatorname{locmin}f$, поскольку на последовательности векторов $x_n=\frac{e_n}{n}$, $n=1,2,\ldots$ (e_n — n-й базисный вектор пространства l_2), $f(x_n)=\frac{1}{n^5}-\frac{1}{n^4}<0=f(0)$ при $n>1$, а сама последовательность $\left\{\frac{e_n}{n}\right\}\to 0$ в пространстве l_2 при $n\to+\infty$.

§ 7. Гладкая задача с равенствами

7.1. Постановка задачи

Пусть X,Y — линейные нормированные пространства. Функционал $f\colon X\to\mathbf{R}$ и отображение $F\colon X\to Y$ обладают определенной гладкостью. *Гладкой экстремальной задачей с ограничениями типа равенств в нормированных пространствах* называется следующая задача:

$$f(x)\to\operatorname{extr};\quad F(x)=0. \tag{P}$$

Отметим, что отображение типа равенства в бесконечномерных пространствах может содержать в себе как конечное, так и бесконечное число равенств.

7.2. Необходимые условия I порядка

Теорема (правило множителей Лагранжа). *Пусть* $\hat{x}\in\operatorname{locextr}P$ *— точка локального экстремума в задаче* (P), X,Y *— банаховы пространства* (условие банаховости), *функционал* f *и отображение* $F\in SD(\hat{x})$ *— строго дифференцируемы в точке* $\hat{x}$ (условие гладкости), $\operatorname{Im}F'(\hat{x})$ *— замкнутое подпространство в* Y (ослабленное условие регулярности). *Тогда существуют множители Лагранжа* $\lambda_0\in\mathbf{R}$ *и функционал* $y^*\in Y^*$ *не равные одновременно нулю,* $(\lambda_0,y^*)\neq 0$, *и такие, что для функции Лагранжа задачи* (P)

$$\Lambda(x)=\lambda_0 f(x)+\langle y^*,F(x)\rangle$$

выполняется условие стационарности:

$$\Lambda'(\hat{x})=0$$

$$\left(\Leftrightarrow\lambda_0\langle f'(\hat{x}),h\rangle+\langle y^*,F'(\hat{x})[h]\rangle=0\ \forall\, h\in X\Leftrightarrow\right.$$

$$\left.\langle\lambda_0 f'(\hat{x})+(F'(\hat{x}))^*y^*,h\rangle=0\ \forall\, h\in X\Leftrightarrow\lambda_0 f'(\hat{x})+(F'(\hat{x}))^*y^*=0\right).$$

Замечание. *Если в условиях теоремы выполнено условие регулярности отображения* F *в точке* $\hat{x}$, *т.е.* $\operatorname{Im}F'(\hat{x})=Y$, *то множитель* $\lambda_0\neq 0$, *и, следовательно, можем считать его равным единице*: $\lambda_0=1$.

Действительно, если $\lambda_0=0$, то $y^*\neq 0$ в силу того, что множители Лагранжа одновременно в ноль не обращаются. Поэтому условие стационарности приобретает вид: $\langle y^*,F'(\hat{x})[h]\rangle=0\ \forall\, h\in X\Leftrightarrow\langle y^*,Y\rangle=0\Leftrightarrow y^*=0$. Получили противоречие.

Доказательство. Определим отображение

$$\mathcal{F}(x) := \big(f(x) - f(\hat{x}),\ F(x)\big), \quad \mathcal{F}\colon X \to \mathbf{R} \times Y.$$

Очевидно, что отображение $\mathcal{F} \in SD(\hat{x})$ и производная Фреше $\mathcal{F}'(\hat{x}) = \big(f'(\hat{x}), F'(\hat{x})\big)\colon X \to \mathbf{R} \times Y$.

Возможно одно из двух: образ $\operatorname{Im}\mathcal{F}'(\hat{x})$ совпадает или не совпадает со всем пространством $\mathbf{R} \times Y$.

А) *Вырожденный случай*: $\operatorname{Im}\mathcal{F}'(\hat{x}) \neq \mathbf{R} \times Y$. К отображению $\mathcal{F}'(\hat{x})$ применим лемму о замкнутости образа. Образ $\operatorname{Im}F'(\hat{x})$ замкнут по условию, образ $f'(\operatorname{Ker}F'(\hat{x}))$ есть либо 0, либо $\mathbf{R}$, т. е. замкнутое подмножество в $\mathbf{R}$. Значит, по этой лемме образ $\operatorname{Im}\mathcal{F}'(\hat{x})$ замкнут в $\mathbf{R} \times Y$. Так как он не совпадает с $\mathbf{R} \times Y$, то $\operatorname{Im}\mathcal{F}'(\hat{x})$ — собственное замкнутое подпространство. По лемме о нетривиальности аннулятора существуют число λ_0 и функционал $y^* \in Y^*$, не равные нулю одновременно и такие, что, $(\lambda_0, y^*) \in \big(\operatorname{Im}\mathcal{F}'(\hat{x})\big)^{\perp}$. Значит,

$$\big\langle(\lambda_0, y^*), \operatorname{Im}\mathcal{F}'(\hat{x})\big\rangle = 0 \iff \big\langle(\lambda_0, y^*), \mathcal{F}'(\hat{x})[h]\big\rangle = 0 \quad \forall\, h \in X \iff$$
$$\Big\langle(\lambda_0, y^*), \big(\langle f'(\hat{x}), h\rangle,\ F'(\hat{x})[h]\big)\Big\rangle = 0 \quad \forall\, h \in X \iff$$
$$\big\langle\lambda_0 f'(\hat{x}), h\big\rangle + \big\langle y^*, F'(\hat{x})[h]\big\rangle = 0 \quad \forall\, h \in X.$$

А это и есть условие стационарности.

В) *Невырожденный случай*: $\operatorname{Im}\mathcal{F}'(\hat{x}) = \mathbf{R} \times Y$. По теореме об обратном отображении существуют отображение $\mathcal{F}^{-1}\colon W \subset \mathbf{R} \times Y \to X$ некоторой окрестности W точки $(\hat{\alpha}, \hat{y})$ $\big((\hat{\alpha}, \hat{y}) = (0, 0)\big)$ и константа $K > 0$ такие, что $\mathcal{F}^{-1}(\hat{\alpha}, \hat{y}) = \hat{x}$,

$$\mathcal{F}\big(\mathcal{F}^{-1}(\alpha, y)\big) = (\alpha, y), \quad \big\|\mathcal{F}^{-1}(\alpha, y) - \mathcal{F}^{-1}(\hat{\alpha}, \hat{y})\big\| \leqslant K\big\|(\alpha, y) - (\hat{\alpha}, \hat{y})\big\| \iff$$
$$\big\|\mathcal{F}^{-1}(\alpha, y) - \hat{x}\big\| \leqslant K\big\|(\alpha, y)\big\| \quad \forall\ (\alpha, y) \in W.$$

Положим $x(\varepsilon) = \mathcal{F}^{-1}(\varepsilon, 0)$ для достаточно малого по модулю ε. Тогда

$$\mathcal{F}\big(x(\varepsilon)\big) = (\varepsilon, 0) \iff f\big(x(\varepsilon)\big) - f(\hat{x}) = \varepsilon,\ F\big(x(\varepsilon)\big) = 0,$$
$$\big\|x(\varepsilon) - \hat{x}\big\| = \big\|\mathcal{F}^{-1}(\varepsilon, 0) - \hat{x}\big\| \leqslant K\big\|(\varepsilon, 0)\big\| = K|\varepsilon|.$$

Из этих соотношений следует, что вектор $\hat{x}$ не доставляет в задаче экстремума, ибо вблизи его существуют допустимые векторы $x(\varepsilon)$, на которых функционал f принимает значения как большие так и меньшие чем $f(\hat{x})$. Получили противоречие с тем, что $\hat{x} \in \operatorname{locextr}P$. Таким образом, невырожденный случай невозможен, и тем самым теорема доказана. ∎

7.3. Необходимые условия II порядка

Теорема. *Пусть* $\hat{x} \in \operatorname{locmin}P$ *— точка локального минимума в задаче* (P), X, Y *— банаховы пространства* (условие банаховости), *функционал* f *и отображение* F *имеют в точке* $\hat{x}$ *вторые производные Фреше* $\big(f, F \in D^2(\hat{x})\big)$ (условие гладкости), $\operatorname{Im}F'(\hat{x}) = Y$ (условие регулярности). *Тогда существует множитель Лагранжа — функционал* $y^* \in Y^*$ *такой, что для функции Лагранжа с множителем Лагранжа* $\lambda_0 = 1$ *задачи* (P)

$$\Lambda(x) = f(x) + \langle y^*, F(x)\rangle$$

выполняются условия стационарности:

$$\Lambda'(\hat{x}) = 0 \quad \big(\Leftrightarrow f'(\hat{x}) + \big(F'(\hat{x})\big)^* y^* = 0\big) \tag{1}$$

и неотрицательности:

$$\Lambda''(\hat{x})[h, h] \geqslant 0 \quad \forall\ h \in \operatorname{Ker}F'(\hat{x}). \tag{2}$$

Доказательство. Условие стационарности (1) с множителем Лагранжа $\lambda_0 = 1$ вытекает из правила множителей Лагранжа для гладкой задачи с равенствами и замечания к нему (см. предыдущий пункт).

Возьмем $h \in \operatorname{Ker}F'(\hat{x})$. Тогда по теореме о касательном пространстве $\operatorname{Ker}F'(\hat{x}) = T_{\hat{x}}M$, где $M = \{x \in X \mid F(x) = F(\hat{x}) = 0\}$. Следовательно, $h \in T_{\hat{x}}M$ и, значит, существуют $\varepsilon > 0$ и отображение $r\colon [-\varepsilon; \varepsilon] \to X$ такие, что $F\big(\hat{x} + th + r(t)\big) = 0\ \forall\ t \in [-\varepsilon; \varepsilon]$ и $\|r(t)\| = o(t)$ при $t \to 0$. Таким образом, $\hat{x} + th + r(t)$ — допустимый элемент в задаче (P) при $t \in [-\varepsilon; \varepsilon]$ и, так как $\hat{x} \in \operatorname{locmin}P$, то $f(\hat{x}) \leqslant f\big(\hat{x} + th + r(t)\big)$. Поэтому по определению функции Λ и по формуле Тейлора

$$f(\hat{x}) \leqslant f\big(\hat{x} + th + r(t)\big) = \Lambda\big(\hat{x} + th + r(t)\big) - \big\langle y^*, F\big(\hat{x} + th + r(t)\big)\big\rangle =$$
$$= \Lambda(\hat{x}) + \Lambda'(\hat{x})\big[th + r(t)\big] + \frac{1}{2}\Lambda''(\hat{x})\big[th + r(t), th + r(t)\big] + o(t^2) =$$
$$= f(\hat{x}) + \frac{t^2}{2}\Lambda''(\hat{x})[h, h] + o(t^2).$$

Отсюда

$$\frac{t^2}{2}\Lambda''(\hat{x})[h, h] + o(t^2) \geqslant 0$$

при малых t. Разделим обе части последнего неравенства на t^2 и устремим t к нулю. Получим

$$\Lambda''(\hat{x})[h, h] \geqslant 0.$$

∎

7.4. Достаточные условия II порядка

Теорема. *Пусть выполняются условия теоремы о необходимых условиях II порядка* (банаховость, гладкость, регулярность, стационарность для функции Лагранжа $\Lambda(x) = f(x) + \langle y^*, F(x)\rangle$ с множителем $\lambda_0 = 1$) *и для некоторого* $\alpha > 0$ *выполнятся условие строгой положительности*:

$$\Lambda''(\hat{x})[h,h] \geqslant \alpha\|h\|^2 \quad \forall\, h \in \operatorname{Ker} F'(\hat{x}).$$

Тогда $\hat{x} \in \operatorname{locmin} P$ *— точка локального минимума в задаче* (P).

Доказательство. Применяя лемму о правом обратном операторе к отображению $F'(\hat{x})\colon X \overset{\text{на}}{\to} Y$, построим оператор $M\colon Y \to X$ такой, что

$$F'(\hat{x}) \circ M = I_Y, \quad \|My\| \leqslant C\|y\| \quad \forall\, y \in Y.$$

Возьмем $\|h\| < \delta$ и $\hat{x}+h$ — допустимый элемент в задаче ($F(\hat{x}+h) = 0$). Положим $h_2 = M\big(F'(\hat{x})[h]\big)$ и обозначим $h_1 = h - h_2$. Тогда $F'(\hat{x})[h_1] = F'(\hat{x})[h - h_2] = F'(\hat{x})[h] - F'(\hat{x})M\big(F'(\hat{x})[h]\big) = F'(\hat{x})[h] - F'(\hat{x})[h] = 0$. Значит, $h_1 \in \operatorname{Ker} F'(\hat{x})$. По формуле Тейлора

$$0 = F(\hat{x}+h) = F(\hat{x}) + F'(\hat{x})[h] + \frac{1}{2}F''(\hat{x})[h,h] + o\big(\|h\|^2\big).$$

Отсюда существует $\delta > 0$ такое, что $\|F'(\hat{x})[h]\| \leqslant C_1\|h\|^2 \quad \forall\ \|h\| < \delta$. Поэтому $\|h_2\| = \|M(F'(\hat{x})[h])\| \leqslant C\|F'(\hat{x})[h]\| \leqslant CC_1\|h\|^2 \leqslant CC_1\delta\|h\| = \varepsilon\|h\|$ при $\varepsilon = CC_1\delta$ и $\|h\| - \|h_2\| \leqslant \|h_1\| = \|h - h_2\| \leqslant \|h\| + \|h_2\| \Leftrightarrow (1-\varepsilon)\|h\| \leqslant \|h_1\| \leqslant (1+\varepsilon)\|h\|$.

Вновь по формуле Тейлора

$$f(\hat{x}+h) = \Lambda(\hat{x}+h) = \Lambda(\hat{x}) + \Lambda'(\hat{x})[h] + \frac{1}{2}\Lambda''(\hat{x})[h,h] + o\big(\|h\|^2\big) = f(\hat{x}) + \frac{1}{2}\Lambda''(\hat{x})[h,h] + o\big(\|h\|^2\big).$$

Отсюда, обозначая $B\colon = \|\Lambda''(\hat{x})\|$, имеем

$$\begin{aligned} f(\hat{x}+h) - f(\hat{x}) &= \frac{1}{2}\Lambda''[h_1+h_2, h_1+h_2] + o\big(\|h\|^2\big) = \\ &= \frac{1}{2}\big(\Lambda''[h_1,h_1] + 2\Lambda''[h_1,h_2] + \Lambda''[h_2,h_2]\big) + o\big(\|h\|^2\big) \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{2}\big(\alpha\|h_1\|^2 - 2B\|h_1\|\cdot\|h_2\| - B\|h_2\|^2\big) + o\big(\|h\|^2\big) \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{2}\|h\|^2\big(\alpha(1-\varepsilon)^2 - 2B(1+\varepsilon)\varepsilon - B\varepsilon^2\big) + o\big(\|h\|^2\big) \geqslant 0 \end{aligned}$$

при достаточно малых $\varepsilon > 0$ (при $\varepsilon = 0$ множитель в круглых скобках равен $\alpha > 0$). Из последнего соотношения следует, что $\hat{x} \in \operatorname{locmin} P$. ∎

§ 8. Гладкая задача с равенствами и неравенствами

8.1. Постановка задачи

Пусть X, Y — линейные нормированные пространства. Отображение $F\colon X \to Y$, функционалы $f_i\colon X \to \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, обладают некоторой гладкостью. *Гладкой экстремальной задачей с ограничениями типа равенств и неравенств* в нормированных пространствах называется следующая задача:

$$f_0(x) \to \min; \quad f_i(x) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad F(x) = 0. \qquad (P)$$

8.2. Необходимые условия I порядка

Теорема (правило множителей Лагранжа). *Пусть* $\hat{x} \in \operatorname{locmin} P$ *— точка локального минимума в задаче* (P), X, Y *— банаховы пространства* (условие банаховости), *отображения* $F, f_i \in SD(\hat{x})$, $i = 0, 1, \ldots, m$, *— строго дифференцируемы в точке* $\hat{x}$ (условие гладкости), $\operatorname{Im} F'(\hat{x})$ *— замкнутое подпространство в* Y (ослабленное условие регулярности). *Тогда существуют множители Лагранжа — вектор* $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ *и функционал* $y^* \in Y^*$ *не равные одновременно нулю,* $(\lambda, y^*) \neq 0$, *и такие, что для функции Лагранжа задачи* (P)

$$\Lambda(x) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x) + \langle y^*, F(x)\rangle$$

выполняются условия:

a) *стационарности*:

$$\Lambda'(\hat{x}) = 0$$

$$\Big(\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i'(\hat{x})[h] + \langle y^*, F'(\hat{x})[h]\rangle = 0\ \forall\, h \in X \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i'(\hat{x}) + \big(F'(\hat{x})\big)^* y^* = 0\Big);$$

b) *дополняющей нежесткости*:

$$\lambda_i f_i(\hat{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m;$$

c) *неотрицательности*:

$$\lambda_i \geqslant 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m.$$

Доказательство. Можно считать, что $f_0(\hat{x}) = 0$, иначе рассмотрим функцию $\widetilde{f}_0(x) = f_0(x) - f_0(\hat{x})$. Если $f_i(\hat{x}) \neq 0$ при $1 \leqslant i \leqslant m$, то отбросим эти ограничения, поскольку для локального экстремума ограничения $f_i(x) < 0$ несущественны и полагаем $\lambda_i = 0$. Таким образом, можно считать, что условия дополняющей нежесткости уже выполнены.

A) *Вырожденный случай.* $\operatorname{Im} F'(\hat{x}) \neq Y$. Тогда $\operatorname{Im} F'(\hat{x})$ есть замкнутое собственное подпространство Y. По лемме о нетривиальности аннулятора существует ненулевой функционал $y^* \in \left(\operatorname{Im} F'(\hat{x})\right)^{\perp} \subset Y^*$ такой, что $\langle y^*, y\rangle = 0 \ \forall\, y \in \operatorname{Im} F'(\hat{x}) \Leftrightarrow \langle y^*, F'(\hat{x})[h]\rangle = 0 \ \forall\, h \in X \Leftrightarrow \left(F'(\hat{x})\right)^* y^* = 0$. Остается положить $\lambda_i = 0$, $i = 0, 1, \ldots, m$, и приходим к утверждению теоремы.

B) *Невырожденный случай.* $\operatorname{Im} F'(\hat{x}) = Y$, т. е. оператор $F'(\hat{x})$ отображает пространство X на все Y. Положим для $0 \leqslant k \leqslant m$

$$A_k = \left\{h \mid \langle f_i'(\hat{x}), h\rangle < 0,\ i = k, k+1, \ldots, m,\ F'(\hat{x})[h] = 0\right\}.$$

Очевидно, что $A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_m$.

Лемма 1 (основная). *A_0 — пустое множество.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. $A_0 \neq \varnothing$. Тогда существует вектор $h \in \operatorname{Ker} F'(\hat{x})$, для которого $\langle f_i'(\hat{x}), h\rangle < 0$, $i = 0, 1, \ldots, m$. По теореме о касательном пространстве $\operatorname{Ker} F'(\hat{x}) = T_{\hat{x}} M$, где $M = \left\{x \in X \mid F(x) = F(\hat{x}) = 0\right\}$. Значит, существует отображение $r\colon [-\varepsilon, \varepsilon] \to X$ $(\varepsilon > 0)$ такое, что $\|r(t)\| = o(t)$,

$$\hat{x} + th + r(t) \in M \Leftrightarrow F\left(\hat{x} + th + r(t)\right) = 0 \quad \forall\, t \in [-\varepsilon, \varepsilon]. \qquad (1)$$

При малых $t > 0$ имеем неравенства

$$f_i\left(\hat{x} + th + r(t)\right) = f_i(\hat{x}) + t\langle f_i'(\hat{x}), h\rangle + o(t) < 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m. \qquad (1_i)$$

Соотношения (1) и (1_i), $i = 1, \ldots, m$, означают, что при малых $t > 0$ элемент $\hat{x} + th + r(t)$ допустимый в задаче (P). Но при этом неравенство (1_0) при малых $t > 0$ противоречит тому, что $\hat{x} \in \operatorname{locmin} P$. ■

C) **Лемма 2.** *Если A_m есть пустое множество, то для задачи (P) верен принцип Лагранжа.*

Доказательство. Поскольку $A_m = \left\{h \mid \langle f_m'(\hat{x}), h\rangle < 0,\ F'(\hat{x})[h] = 0\right\} = \varnothing$, то $\langle f_m'(\hat{x}), h\rangle = 0 \ \forall\, h \in \operatorname{Ker} F'(\hat{x})$, т. е. $f_m'(\hat{x}) \in \left(\operatorname{Ker} F'(\hat{x})\right)^{\perp}$. Так как по лемме об аннуляторе ядра регулярного оператора $\left(\operatorname{Ker} F'(\hat{x})\right)^{\perp} = \operatorname{Im}\left(F'(\hat{x})\right)^*$, то $f_m'(\hat{x}) \in \operatorname{Im}\left(F'(\hat{x})\right)^*$ и, значит, существует $y^* \in Y^*$, для которого $f_m'(\hat{x}) + \left(F'(\hat{x})\right)^* y^* = 0$.

Получили условие стационарности функции Лагранжа $\Lambda(x)$ с $\lambda_0 = \ldots = \lambda_{m-1} = 0$, $\lambda_m = 1$. ■

Таким образом, из пп. B) и C) вытекает, что либо принцип Лагранжа уже обоснован $(A_m = \varnothing)$, либо

$$\exists\, k,\ 0 \leqslant k < m\colon\ A_k = \varnothing,\ A_{k+1} \neq \varnothing. \qquad (2)$$

D) **Лемма 3.** *Если выполнены соотношения* (2), *то $\hat{h} = 0$ является решением следующей задачи:*

$$\langle f_k'(\hat{x}), h\rangle \to \min; \quad \langle f_i'(\hat{x}), h\rangle \leqslant 0, \quad i = k+1, \ldots, m, \quad F'(\hat{x})[h] = 0. \ (\widetilde{P})$$

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда найдется такой элемент η, что $\langle f_k'(\hat{x}), \eta\rangle < 0$, $\langle f_i'(\hat{x}), \eta\rangle \leqslant 0$, $i = k+1, \ldots, m$, $F'(\hat{x})[\eta] = 0$. Пусть ξ — элемент, принадлежащий A_{k+1}, т. е. $\langle f_i'(\hat{x}), \xi\rangle < 0$, $i = k+1, \ldots, m$, $F'(\hat{x})[\xi] = 0$. Тогда при малом $t > 0$ элемент $\eta + t\xi$ принадлежит A_k в противоречии с (2). ■

E) *Завершение доказательства.* Применим к задаче $(\widetilde{P})$ теорему Куна—Таккера, учтя при этом, что условие Слейтера для этой задачи выполнено (из-за непустоты A_{k+1}). По этой теореме найдутся неотрицательные числа $\lambda_k = 1$, $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_m$, такие, что выполняются условия дополняющей нежесткости $\lambda_i f_i(\hat{x}) = 0$, $i = k+1, \ldots, m$, и для функции Лагранжа задачи $(\widetilde{P})$ $\widetilde{\Lambda}(h) = \sum\limits_{i=k}^{m} \lambda_i \langle f_i'(\hat{x}), h\rangle$ в точке $\hat{h} = 0$ выполнен принцип минимума: $\min_{h \in \operatorname{Ker} F'(\hat{x})} \widetilde{\Lambda}(h) = \widetilde{\Lambda}(\hat{h}) = 0 \iff$

$$\widetilde{\Lambda}(h) = \sum_{i=k}^{m} \lambda_i \langle f_i'(\hat{x}), h\rangle \geqslant \widetilde{\Lambda}(\hat{h}) = \sum_{i=k}^{m} \lambda_i \langle f_i'(\hat{x}), 0\rangle = 0 \ \forall\, h \in \operatorname{Ker} F'(\hat{x}).$$

Из последнего соотношения вытекает, что $\widetilde{\Lambda}(h) = \sum\limits_{i=k}^{m} \lambda_i \langle f_i'(\hat{x}), h\rangle = 0$ для любого $h \in \operatorname{Ker} F'(\hat{x})$, т. е. $\sum\limits_{i=k}^{m} \lambda_i f_i'(\hat{x}) \in \left(\operatorname{Ker} F'(\hat{x})\right)^{\perp}$. Поскольку по лемме об аннуляторе ядра регулярного оператора $\left(\operatorname{Ker} F'(\hat{x})\right)^{\perp} = \operatorname{Im}\left(F'(\hat{x})\right)^*$, то существует $y^* \in Y^*$, для которого

$$\sum_{i=k}^{m} \lambda_i f_i'(\hat{x}) + \left(F'(\hat{x})\right)^* y^* = 0.$$

Это и есть условие стационарности функции Лагранжа $\Lambda(x)$, если положить $\lambda_0 = \ldots = \lambda_{k-1} = 0$. ■

Замечание. Из доказательства теоремы следует, что если $\operatorname{Im} F'(\hat{x}) = Y$ и существует элемент $h \in \operatorname{Ker} F'(\hat{x})$, для которого $\langle f_i'(\hat{x}), h\rangle < 0$, $i = 1, \ldots, m$, $\Leftrightarrow A_1 \neq \varnothing$ (назовем это условие аналогом условия Слейтера), то $\lambda_0 \neq 0$ и, следовательно, можем полагать $\lambda_0 = 1$.

Приведем еще одно доказательство правила множителей Лагранжа с использованием элементов выпуклого анализа.

Доказательство. Как и в предыдущем случае, не ограничивая общности, считаем, что $f_i(\hat{x}) = 0$, $i = 0, 1, \dots, m$. Будем рассматривать основной *невырожденный случай*: $\operatorname{Im} F'(\hat{x}) = Y$. Рассмотрим задачу без ограничений

$$\varphi(h) := \max_{i=0,1,\dots,m} \langle f_i'(\hat{x}), h\rangle + \delta \operatorname{Ker} F'(\hat{x})(h) \to \min,$$

где $\delta A(\cdot)$ — индикаторная функция выпуклого множества A.

Лемма. *Вектор $\hat{h} \equiv 0$ доставляет абсолютный минимум функции φ* ($\hat{h} \equiv 0 \in \operatorname{absmin} \varphi$).

Доказательство. Доказательство леммы проведем от противного. Предположим, что $0 \notin \operatorname{absmin} \varphi$. Тогда $S_{\text{absmin}} < 0$. Следовательно, существует вектор $h \in \operatorname{Ker} F'(\hat{x})$, для которого $\max\limits_{i=0,1,\dots,m} \langle f_i'(\hat{x}), h\rangle < 0 \Leftrightarrow \langle f_i'(\hat{x}), h\rangle < 0$, $i = 0, \dots, m$. Поскольку $\operatorname{Im} F'(\hat{x}) = Y$, то по теореме о касательном пространстве $h \in \operatorname{Ker} F'(\hat{x}) = T_{\hat{x}}M$, где $M = \{x \mid F(x) = F(\hat{x}) = 0\}$. Тогда по определению касательного вектора существует отображение $r\colon [-\varepsilon, \varepsilon] \to X$ такое, что $F(\hat{x} + th + r(t)) = 0 \ \forall\, t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $\|r(t)\| = o(t)$. Поэтому $f_i(\hat{x} + th + r(t)) = f_i(\hat{x}) + \langle f_i'(\hat{x}), th + r(t)\rangle + o(\|th + r(t)\|) = t\langle f_i'(\hat{x}), h\rangle + o(t) < 0$ при малых $t > 0$, $i = 0, 1, \dots, m$. Таким образом, вектор $\hat{x} + th + r(t)$ является допустимым элементом в задаче (P), но при этом $f_0(\hat{x} + th + r(t)) < 0 = f_0(\hat{x})$. Получаем противоречие с тем, что $\hat{x} \in \operatorname{locmin} P$. ■

Вектор $\hat{h} \equiv 0$ доставляет абсолютный минимум выпуклой функции φ, следовательно, по аналогу теоремы Ферма для минимума выпуклой функции $0 \in \partial\varphi(\hat{h})$. По теореме Моро—Рокафеллара субдифференциал суммы функций равен сумме субдифференциалов, значит,

$$0 \in \partial\varphi(\cdot) = \partial \max_{i=0,1,\dots,m} \langle f_i'(\hat{x}), \cdot\rangle + \partial\delta \operatorname{Ker} F'(\hat{x})(\cdot).$$

По теореме Дубовицкого—Милютина субдифференциал максимума функций равен выпуклой оболочке субдифференциалов, следовательно, $\partial \max\limits_{i=0,1,\dots,m} \langle f_i'(\hat{x}), \cdot\rangle = \operatorname{conv} \{f_0'(\hat{x}), \dots, f_m'(\hat{x})\}$. По определению субдифференциала функции $\partial\delta \operatorname{Ker} F'(\hat{x})(0) = \{h^* \in X^* \mid \langle h^*, h\rangle \leqslant \delta \operatorname{Ker} F'(\hat{x})(h) - \delta \operatorname{Ker} F'(\hat{x})(0) \ \forall\ h \in X\} \overset{0 \in \operatorname{Ker} F'(\hat{x})}{=} \{h^* \mid \langle h^*, h\rangle \leqslant \delta \operatorname{Ker} F'(\hat{x})(h) \ \forall\ h\} = (\operatorname{Ker} F'(\hat{x}))^{\perp} = \operatorname{Im} (F'(\hat{x}))^*$ (по лемме об аннуляторе ядра регулярного оператора). Таким образом, $0 \in \operatorname{conv} \{f_0'(\hat{x}), \dots, f_m'(\hat{x})\} + \operatorname{Im} (F'(\hat{x}))^*$. Значит, существует вектор $\lambda \in \mathbb{R}^{m+1}$ такой, что $\sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geqslant 0$, и функционал $y^* \in Y^*$, для которых $\sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i f_i'(\hat{x}) + (F'(\hat{x}))^* y^* = 0$. ■

8.3. Необходимые условия II порядка

Теорема. *Пусть $\hat{x} \in \operatorname{locmin} P$ — точка локального минимума в задаче (P), X, Y — банаховы пространства* (условие банаховости), *функционалы f_i, $i = 0, 1, \dots, m$, и отображение F — дважды дифференцируемы по Фреше в некоторой окрестности точки $\hat{x}$* (условие гладкости), $\operatorname{Im} F'(\hat{x}) = Y$ (условие регулярности). *Тогда*

$$\max_{(\lambda, y^*) \in Л} \Lambda_{xx}(\hat{x}, \lambda, y^*)[h, h] \geqslant 0 \quad \forall\ h \in K,$$

где $\Lambda(x, \lambda, y^*) = \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x) + \langle y^*, F(x)\rangle$,

$$K := \{h \in X \mid \langle f_i'(\hat{x}), h\rangle \leqslant 0,\ i = 0, 1, \dots, m,\ F'(\hat{x})[h] = 0\}$$

— конус допустимых вариаций, а

$$Л := \Big\{(\lambda, y^*) \in \mathbb{R}^{m+1} \times Y^* \ \Big|\ \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i'(\hat{x}) + (F'(\hat{x}))^* y^* = 0;$$

$$\lambda_i f_i(\hat{x}) = 0,\ i = 1, \dots, m; \quad \lambda_i \geqslant 0,\ i = 0, 1, \dots, m,\ \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1\Big\} \neq \varnothing.$$

Множество $Л$ — совокупность наборов (λ, y^*), для которых выполнены условия a)–c) правила множителей Лагранжа для задач с равенствами и неравенствами и $\sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i = 1$.

Доказательство этой теоремы см. [ГТ, с. 124].

8.4. Достаточные условия II порядка

Теорема. *Пусть выполняются условия теоремы о необходимых условиях второго порядка* (банаховость, гладкость, регулярность), *множество $Л \neq \varnothing$ и для некоторого $\alpha > 0$ выполняется условие строгой положительности*:

$$\max_{(\lambda, y^*) \in Л} \Lambda_{xx}(\hat{x}, \lambda, y^*)[h, h] \geqslant \alpha \|h\|^2$$

для любого h, принадлежащего конусу допустимых вариаций K. Тогда $\hat{x} \in \operatorname{locmin} P$ — точка локального минимума в задаче (P).

Доказательство этой теоремы см. [ГТ, с. 136].

Ответы к задачам главы 1

1.1. $(5,2) \in \text{locmin}$, $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.

1.2. $(2,3) \notin \text{locextr}$, $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.

1.3. $(-4,14) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = -52$, $S_{\max} = +\infty$.

1.4. $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = -\frac{4}{3}$, $S_{\max} = +\infty$.

1.5. $\left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right) \notin \text{locextr}$, $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.

1.6. $(1,1) \in \text{locmin}$, $(0,0) \notin \text{locextr}$, $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.

1.7. $(1,1) \in \text{locmax}$, $(0,0), (0,3), (3,0) \notin \text{locextr}$, $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.

1.8. $(0,0) \notin \text{locextr}$, $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.

1.9. $\left(\pm\frac{1}{2}, \pm 1\right) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = -1\frac{1}{8}$, $(0,0) \in \text{locmax}$, $\left(\pm\frac{1}{2}, 0\right), (0, \pm 1) \notin \text{locextr}$, $S_{\max} = +\infty$.

1.10. $\left(\frac{\pm 1}{\sqrt{2e}}, \frac{\pm 1}{\sqrt{2e}}\right) \in \text{locmin}$, $\left(\frac{\pm 1}{\sqrt{2e}}, \frac{\mp 1}{\sqrt{2e}}\right) \in \text{locmax}$, $(\pm 1, 0), (0, \pm 1) \notin \text{locextr}$, $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.

1.11. $(2,3) \in \text{locmax}$, $(0, x_2) \in \text{locmax}$ при $x_2 \in (-\infty; 0) \cup (6, +\infty)$, $(0, x_2) \in \text{locmin}$ при $0 < x_2 < 6$, $(0,0), (0,6), (x_1, 0) \notin \text{locextr}$, $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.

1.12. $(0,0) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 0$, $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right) \notin \text{locextr}$, $S_{\max} = +\infty$.

1.13. $(1,-2) \notin \text{locextr}$, $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.

1.14. $(1,1,1) \in \text{locmax}$, $(x_1, 0, x_3), (x_1, x_2, 0) \notin \text{locextr}$, $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.

1.15. $t^2 - \frac{1}{3} \in \text{absmin}$, $S_{\min} = \frac{8}{45}$.

1.16. $t^3 - \frac{3t}{5} \in \text{absmin}$, $S_{\min} = \frac{8}{175}$.

1.17. $(-3-\sqrt{6}, -3-\sqrt{6}) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = -4 - 2\sqrt{6}$, $(-3+\sqrt{6}, -3+\sqrt{6}) \in \text{absmax}$, $S_{\max} = -4 + 2\sqrt{6}$.

2.1. $\left(\frac{3}{25}, \frac{4}{25}\right) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = \frac{1}{25}$, $S_{\max} = +\infty$.

2.2. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in \text{absmax}$, $S_{\max} = e^{\frac{1}{4}}$, $S_{\min} = 0$.

2.3. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = -\sqrt{2}$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right) \in \text{absmax}$, $S_{\max} = \sqrt{2}$.

2.4. $(2,-3), (-2,3) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = -50$, $\left(\frac{3}{2}, 4\right), \left(-\frac{3}{2}, -4\right) \in \text{absmax}$, $S_{\max} = 106\frac{1}{4}$.

2.5. $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = \frac{1}{3}$, $S_{\max} = +\infty$.

2.6. $\left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right) \in \text{absmax}$, $S_{\max} = \sqrt{14}$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}\right) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = -\sqrt{14}$.

2.7. $\left(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}\right) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = \frac{11}{32}$, $S_{\max} = +\infty$.

2.8. $\left(\frac{33}{2}, \frac{229}{2}, 98\right) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = -\frac{1071}{2}$, $S_{\max} = +\infty$.

2.10. $(-1,1,1) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 0$, $(1,1,1) \in \text{absmax}$, $S_{\max} = 2$.

2.11. $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \in \text{absmin}$, $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \mp\frac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \mp\frac{2}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\mp\frac{2}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \in \text{absmax}$, $S_{\min} = -\frac{1}{3\sqrt{6}}$, $S_{\max} = \frac{1}{3\sqrt{6}}$.

2.12. $\left(0, \frac{18}{5}, \frac{24}{5}\right) \in \text{absmax}$, $S_{\max} = 36$, $\left(0, \frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 16$.

2.13. $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \in \text{locmax}$, $(t, 0, 1-t) \in \text{locmin}$ при $t \in (0,1)$, $(t, 0, 1-t) \in \text{locmax}$ при $t \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, $(0,0,1), (1,0,0), (t, 1-t, 0) \notin \text{locextr}$ $\forall\, t$, $S_{\max} = +\infty$, $S_{\min} = -\infty$.

2.14. $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \in \text{absmax}$, $S_{\max} = \frac{1}{12\sqrt{3}}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = -\frac{1}{12\sqrt{3}}$. **2.15.** $-\frac{a}{|a|} \in \text{absmin}$, $S_{\min} = -|a|$.

2.16. $\hat{x} = \tilde{x} + a \cdot \frac{b - \langle a, \tilde{x} \rangle}{|a|^2}$, $S_{\min} = \frac{|\langle a, \tilde{x} \rangle - b|}{|a|}$.

2.17. $S_{\min} = \left(|\tilde{x} - b|^2 - \dfrac{1}{|a|^2} \langle a, \tilde{x} - b \rangle^2 \right)^{1/2}.$

2.18. Стороны прямоугольника: $a_1\sqrt{2}, a_2\sqrt{2}$, площадь $2a_1a_2$.

2.19. Стороны параллелипипеда: $\dfrac{2a_1}{\sqrt{3}}, \dfrac{2a_2}{\sqrt{3}}, \dfrac{2a_3}{\sqrt{3}}$, объем $\dfrac{8}{3\sqrt{3}} a_1a_2a_3$.

3.1. $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \in \text{absmax}$, $S_{\max} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$, $(t,0,0), (0,t,0), (0,0,t) \notin \text{locextr}\ \forall\, |t| \leqslant 1$.

3.2. $(0,\dots,0) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 0$, $(\pm n^{-1/4}, \dots, \pm n^{-1/4}) \in \text{absmax}$, $S_{\max} = \sqrt{n}$, критические точки $(0,\dots,0,\pm m^{-1/4},\dots,\pm m^{-1/4})$ (и их всевозможные перестановки координат), $m = 1,\dots,n$.

3.3. $(0,\dots,0) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 0$, $(\pm n^{-1/2}, \dots, \pm n^{-1/2}) \in \text{absmax}$, $S_{\max} = 1$, критические точки $(0,\dots,0,\pm m^{-1/2},\dots,\pm m^{-1/2})$ (и их всевозможные перестановки координат), $m = 1,\dots,n$.

3.4. $(0,1) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = e^{-1}$, $(0,1) \in \text{absmax}$, $S_{\max} = e - 1$, $(0,0) \notin \text{locextr}$.

3.5. $(0,0) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 0$, $(0,1) \in \text{absmax}$, $S_{\max} = 1$.

3.6. $(0,0,0) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 0$, $(12,0,0), (0,12,0), (0,0,12) \in$ absmax, $S_{\max} = 144$, $(4,4,4), (0,6,6), (6,0,6), (6,6,0)$ — критические точки в задаче на максимум.

3.7. $(0,0,0) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 0$, $(0,12,0) \in \text{absmax}$, $S_{\max} = 576$, $\left(\frac{16}{3}, \frac{16}{3}, \frac{16}{3}\right), \left(\frac{48}{5}, \frac{12}{5}, 0\right), \left(0, \frac{12}{5}, \frac{48}{5}\right), (6,0,6), (12,0,0), (0,0,12)$ — критические точки в задаче на максимум.

3.8. $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = \frac{1}{12}$, $\left(0, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}\right) \notin \text{locextr}$, $\left(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) \in \text{locmax}$, $S_{\max} = +\infty$.

3.9. $(-2,0,9) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = -23$, $S_{\max} = +\infty$.

3.10. $(-5/2, 0, 20) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = -52,5$, $S_{\max} = +\infty$.

3.11. $(16, 257, 592) \notin \text{locextr}$, $S_{\min} = -\infty$; $S_{\max} = +\infty$.

3.12. $(0,1,0) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 0$, $S_{\max} = +\infty$.

3.13. $\left(\frac{2}{7}, \frac{174}{35}, -\frac{24}{5}\right) \in \text{locmin}$, $S_{\min} = -\infty$, $(1,0,3) \in \text{locmax}$, $S_{\max} = +\infty$, $(-1,6,-3) \notin \text{locextr}$.

3.14. $(\sqrt{6}, 1, 1) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = \sqrt{6}$, $\left(\sqrt{\frac{8}{3}}, \sqrt{\frac{8}{3}}, \sqrt{\frac{8}{3}}\right) \in \text{absmax}$, $S_{\max} = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{8}{3}}$, $\left(\sqrt{\frac{7}{2}}, \sqrt{\frac{7}{2}}, 1\right), \left(\sqrt{\frac{7}{2}}, 1, \sqrt{\frac{7}{2}}\right), \left(1, \sqrt{\frac{7}{2}}, \sqrt{\frac{7}{2}}\right) \notin \text{locmax}$.

4.1. $a \geqslant 0$. **4.2.** $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$. **4.3.** $p \geqslant 1$.

4.4. $a_{11} \geqslant 0$, $a_{22} \geqslant 0$, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \geqslant 0$. **4.5.** да. **4.6.** да.

4.7. $\partial f(\hat{x}) = \begin{cases} -3, & x < 0, \\ [-3, -1], & x = 0, \\ -1, & 0 < x < 1, \\ [-1, 3], & x = 1, \\ 3, & 1 < x. \end{cases}$ **4.8.** $\partial f(\hat{x}) = [0, 1]$.

4.9. $\partial f(\hat{x}) = [-1, 1]$. **4.10.** $\{y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n \mid |y| \leqslant 1\}$.

4.11. $\left\{ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n \;\middle|\; \max\limits_{j=1,\dots,n} |y_j| \leqslant 1 \right\}.$

4.12. $\left\{ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n \;\middle|\; \sum\limits_{j=1}^{n} |y_j| \leqslant 1 \right\}.$

4.13. $\left\{ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n \;\middle|\; \sum\limits_{j=1}^{n} |y_j| = 1,\ y_j \geqslant 0,\ j = 1, \dots, n \right\}.$

4.14. $[0, a]$. **4.15.** $B^* = \{x^* \in X^* \mid \|x^*\|_{X^*} \leqslant 1\}$.

4.18. $(1, -1) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 3$.

4.19. $(-1, -1) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = -2$.

4.20. $a_1^2 + a_2^2 \leqslant 1 \Rightarrow (a_1, a_2) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = a_1^2 + a_2^2$; $a_1^2 + a_2^2 > 1 \Rightarrow \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \right) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 2\sqrt{a_1^2 + a_2^2} - 1$.

4.21. $\frac{1}{2} < \alpha \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = -\frac{1}{2}$.

5.1. $f'(\hat{x})[h] = \langle a, h \rangle$.

5.2. $f'(\hat{x})[h] = 2\langle \hat{x}, h \rangle$.

5.3. $f'(\hat{x})[h] = \dfrac{\langle \hat{x}, h \rangle}{\|\hat{x}\|}$.

5.4. $f'(\hat{x})[h] = 3\langle\hat{x}, h\rangle\|\hat{x}\|$.

5.5. $f'(\hat{x})[h] = h\|\hat{x}\| + \dfrac{\hat{x}\langle\hat{x}, h\rangle}{\|\hat{x}\|}$.

5.6. $f'(\hat{x})[h] = \dfrac{h}{\|\hat{x}\|} - \dfrac{\langle\hat{x}, h\rangle\hat{x}}{\|\hat{x}\|^3}$.

5.7. $f'(\hat{x})[(h_1, h_2)] = (2h_1 + h_2, 2h_1 + 4h_2)$.

5.8. $f'(\hat{x}(\cdot))[h(\cdot)] = 3\int\limits_0^1 \hat{x}^2(t)h(t)\,dt$.

5.9. $f'(\hat{x}(\cdot))[h(\cdot)] = 3\Big(\int\limits_0^1 \hat{x}(t)\,dt\Big)^2 \cdot \int\limits_0^1 h(t)\,dt$.

5.10. $f'(\hat{x}(\cdot))[h(\cdot)] = 6\Big(\int\limits_0^1 \hat{x}^2(t)\,dt\Big)^2 \cdot \int\limits_0^1 \hat{x}(t)h(t)\,dt$.

5.11. $f'(\hat{x}(\cdot))[h(\cdot)] = h(0)$.

5.12. $f'(\hat{x}(\cdot))[h(\cdot)] = \hat{x}(1)h(0) + \hat{x}(0)h(1)$.

5.13. $f'(\hat{x}(\cdot))[h(\cdot)] = \hat{x}(\cdot)h(1) + \hat{x}(1)h(\cdot)$.

5.14. $f'(\hat{x}(\cdot))[h(\cdot)] = \cos\hat{x}(0)h(0)$.

5.15. $f'(\hat{x}(\cdot))[h(\cdot)] = \cos\hat{x}(0)h(0)\cos\hat{x}(1) - \sin\hat{x}(0)\sin\hat{x}(1)h(1)$.

5.16. $f'(\hat{x}(\cdot))[h(\cdot)] = \hat{x}(1)^{\hat{x}(0)}\Big(h(0)\ln\hat{x}(1) + \hat{x}(0)\dfrac{h(1)}{\hat{x}(1)}\Big)$.

5.17. $f'(\hat{x}(\cdot))[h(\cdot)] = (\sin x(0))^{\cos x(1)}\Big(\cos\hat{x}(1)\dfrac{\cos\hat{x}(0)h(0)}{\sin\hat{x}(0)} -$
$\sin\hat{x}(1)h(1)\ln\sin\hat{x}(0)\Big)$.

5.18. $x = 0$.

5.19. $\{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid |x_i| = |x_j|$ для некоторых $i \neq j\}$.

5.20. $\{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 0\}$.

Глава 2

Линейное программирование

В линейном программировании изучаются задачи об экстремуме линейной функции нескольких переменных при ограничениях типа равенств и неравенств, задаваемых также линейными функциями.

Рождение линейного программирования принято отсчитывать от работы Л. В. Канторовича 1939 года об оптимизации раскроя листов фанеры для самолетов и распределения ограниченных ресурсов в более общих проблемах, где впервые было показано, что многие задачи экономики формализуются как задачи об экстремуме линейной функции при линейных ограничениях. Канторович для рассмотренного им класса задач ввел двойственные переменные, дал им содержательную экономическую интерпретацию и описал алгоритм решения двойственной задачи близкий по духу к симплекс-методу.

Через несколько лет (около 1947 года) интерес к подобным задачам возник у американских математиков. Этот интерес был вызван проблемами, связанными с экономикой и военно-промышленным комплексом. Из числа экономистов, пропагандировавших среди математиков данный класс задач, следует прежде всего назвать Т. Купманса. Он же ввел термин «линейное программирование» (linear programming). Впоследствии Канторовичу и Купмансу была присуждена Нобелевская премия по экономике за 1975 год. Слово «программирование» заимствовано из зарубежной литературы и в данном случае означает не что иное, как «планирование».

Симплекс-метод был разработан Д. Данцигом. Общая теория была построена коллективом математиков, среди которых следует отметить так же Куна, Таккера, Гурвица и Дж. фон Неймана.

В этой главе рассматриваются постановки задач линейного программирования, правило решения задач в канонической форме по симплекс-методу, приводятся с решениями примеры. Вводится понятие двойственности, проводится обоснование симплекс-метода, дается ряд методов нахождения первоначальной крайней точки. Рассматриваются наиболее известные типы задач линейного программирования — транспортные задачи и задачи о назначении.

§ 1. Симплекс-метод

1.1. Постановки задач. Геометрическая интерпретация

Задачей линейного программирования в канонической форме называется задача нахождения максимума линейной функции от n переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n,$$

удовлетворяющей системе m линейных неравенств

$$\begin{cases} a_1^1x_1 + a_1^2x_2 + \ldots + a_1^nx_n = b_1, \\ a_2^1x_1 + a_2^2x_2 + \ldots + a_2^nx_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_m^1x_1 + a_m^2x_2 + \ldots + a_m^nx_n = b_m, \end{cases}$$

и ограничениями неотрицательности $x_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, n$. Поскольку уравнения системы можно умножать на -1, то считаем, что $b_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$.

Одним из важнейших экономических прототипов математической модели данной задачи является *производственная задача*. Пусть на предприятии имеются производственные ресурсы m типов в объемах $b_1, \ldots, b_m$. Предприятие производит продукцию n типов. На производство единицы продукции j-го типа требуется использовать ресурс каждого i-го типа в объеме a_i^j. Прибыль от реализации единицы продукции j-го типа равна c_j. Следовательно, при изготовлении x_j единиц продукции каждого типа прибыль предприятия составит величину $\sum\limits_{j=1}^{n} c_jx_j$. Надо найти план производства $(x_1, \ldots, x_n)$ такой, чтобы прибыль предприятия была максимальной. Равенства $a_i^1x_1 + a_i^2x_2 + \ldots + a_i^nx_n = b_i$ будут означать, что весь ресурс каждого i-го типа израсходован полностью.

В дальнейшем мы, как правило, будем использовать векторно-матричную запись:

$$\langle c, x\rangle \to \max; \quad Ax = b, \quad x \geqslant 0. \tag{P_k}$$

Здесь $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ — неизвестная переменная, заданные вектора $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n$ и $b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbf{R}^m$, $\langle c, x\rangle := \sum\limits_{j=1}^{n} c_jx_j$ — скалярное произведение векторов c и x, $A = \{a_i^j\}_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_1^n \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ a_m^1 & \ldots & a_m^n \end{pmatrix}$ — заданная матрица со столбцами $a^j = \begin{pmatrix} a_1^j \\ \ldots \\ a_m^j \end{pmatrix}$, $j = 1, \ldots, n$, размеров $m \times n$.

Функция f называется *целевой функцией*, вектор c — *вектором стоимости*, вектор b — *вектором ограничений*, матрица A — *матрицей условий*.

Обозначим S_P — численное значение задачи (P), $\operatorname{Arg} P$ — множество решений задачи (P), т.е. множество допустимых точек $x \in \mathbf{R}^n$, для которых $\langle c, x\rangle = S_P$.

Задачей линейного программирования в общей форме назовем задачу

$$\langle c, x\rangle \to \min; \quad Ax \leqslant b. \tag{P}$$

Иногда задачи линейного программирования рассматриваются приведенными к *нормальной форме*

$$\langle c, x\rangle \to \max; \quad Ax \leqslant b, \quad x \geqslant 0. \tag{P_n}$$

Каноническая форма более удобна при описании алгоритмов решения, задачи в общей и нормальной формах часто используются при рассмотрении проблем существования решений и двойственности. Двойственные задачи для задач в нормальной форме приобретают наиболее симметричный вид.

Задачи в различных формах легко сводятся друг к другу путем введения дополнительных координат и изменением матрицы A. Например, если дана задача в нормальной форме, то ее можно свести к задаче в канонической форме путем введения дополнительных координат $\tilde{x} = (x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$:

$$\langle c, x\rangle \to \max; \quad Ax + I\tilde{x} = b, \quad x \geqslant 0, \quad \tilde{x} \geqslant 0.$$

Здесь I — единичная матрица размеров $m \times m$.

В качестве упражнений попробуйте самостоятельно свести другие формы задач линейного программирования друг к другу.

Геометрическая интерпретация. Рассмотрим более подробно задачу линейного программирования в канонической форме. Через $D(P_k)$ будем обозначать множество допустимых точек в задаче (P_k) ($D(P_k) := \{x \in \mathbf{R}^n \mid Ax = b,\ x \geqslant 0\}$). Множество $D(P_k)$ является выпуклым многогранником в пространстве $\mathbf{R}^n$. Нетрудно видеть, что экстремум линейной функции (если он существует) достигается в крайней (угловой) точке выпуклого многогранника.

Напомним, что точка d выпуклого множества D называется *крайней* (*угловой*), если не существует точек $d_1, d_2 \in D$, $d_1 \neq d_2$, и числа $t \in (0, 1)$ таких, что $d = td_1 + (1 - t)d_2$. У многогранников крайние точки — вершины. Имеет место следующая

Теорема Минковского. *Выпуклый компакт в* $\mathbf{R}^n$ *является выпуклой оболочкой своих крайних точек**.

* Бесконечномерный аналог этой теоремы: выпуклый компакт в нормированном (и даже локально-выпуклом линейном топологическом) пространстве является выпуклой

Число крайних точек множества D, задаваемого в виде конечного числа линейных равенств и неравенств, является конечным. Таким образом, для решения задачи линейного программирования (если оно существует), достаточно перебрать значения функции $\langle c, x\rangle$ во всех крайних точках множества D. Но нахождение всех этих крайних точек и перебор значений функции $\langle c, x\rangle$ — операция довольно трудоемкая. Описываемый ниже *симплекс-метод* решения задачи линейного программирования позволяет, начиная с некоторой исходной крайней точки, переходить к другой по направлению наибольшего возрастания функции $\langle c, x\rangle$. Свое название симплекс-метод получил из-за вида множества допустимых элементов, которое в простейших задачах имеет вид симплексов (отрезка, треугольника и т. д.)

Задача (P_k) называется *невырожденной*, если любая крайняя точка множества $D(P_k)$ содержит ровно m положительных координат.

Пусть x — крайняя точка в невырожденной задаче с положительными координатами (для определенности первыми) $x_1, \dots, x_m$. Тогда вектор x можно представить в виде $x = (x_b, x_n)$, где $x_b = (x_1, \dots, x_m)$ — базисный вектор, $x_i > 0$, $i = 1, \dots, m$, $x_n = (0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^{n-m}$ — небазисный вектор. Аналогично матрицу A можно представить в виде $A = (A_b, A_n)$. Будет доказано в п. 3.2, что матрица A_b невырожденная, то есть ее определитель отличен от нуля.

1.2. Правило решения задач по симплекс-методу

Для решения невырожденной задачи линейного программирования следует:

1. Привести задачу к задаче в канонической форме (P_k).

2. Отыскать крайнюю точку $x = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$, $x_i > 0$, $i = 1, \dots, m$, множества допустимых элементов $D(P_k)$. Методы нахождения начальной крайней точки будут описаны ниже в § 4.

3. Построить симплексную таблицу для начальной крайней точки x. Пояснения к построению таблицы:

В таблице $m + 4$ строки и $n + 4$ столбца.

В первом столбце, начиная с третьего по $m + 2$-е место, находятся базисные векторы $a^1, \dots, a^m$, соответствующие положительным координатам начальной крайней точки $x = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$.

Во втором столбце на аналогичных местах стоят значения c_j вектора c с теми же номерами, что и столбцы a^j.

Последний столбец заполняется при исследовании симплексной таблицы.

оболочкой своих крайних точек был доказан Крейном и Мильманом. Его называют теоремой Крейна—Мильмана.

В первой строке, начиная с четвертого столбца, стоят элементы $c_1, \dots, c_n$.

Вторая строка, начиная с третьего столбца, — векторы $b, a^1, \dots, a^n$. Под ними — разложения этих векторов по базису $a^1, \dots, a^m$. Ясно, что $b = \sum\limits_{i=1}^{m} a^i x_i \Leftrightarrow Ax = b$. То есть разложением вектора b является вектор x_b ненулевых координат крайней точки x. Предположим, что вектора a^j, $j = 1, \dots, n$, имеют следующее разложение по базису $a^1, \dots, a^m$: $a^j = \sum\limits_{i=1}^{m} a^i x_{ij} \Leftrightarrow a^j = A_b x^j \Leftrightarrow A = A_b X$, где $X = \{x_{ij}\}_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ — матрица разложений векторов $a^1, \dots, a^n$ по базису $a^1, \dots, a^m$, состоящая из столбцов $x^1, \dots, x^n$. Тогда $X = A_b^{-1} A$, то есть неизвестные векторы-столбцы x^j отыскиваются с помощью обратной матрицы: $x^j = A_b^{-1} a^j$. Очевидно, что при $i = 1, \dots, m$ разложения векторов a^i тривиальны: $a^i = a^i$, то есть в этом случае $x^j = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = e^j$ (e^j — вектор-столбец канонического базиса).

В предпоследней строке z в столбце под вектором b (x_b) запишем $z_0 = \langle c_b, x_b\rangle$. Тогда z_0 — значение функционала в начальной крайней точке x. Под векторами a^j, $j = 1, \dots, n$, запишем $z_j = \langle c_b, x^j\rangle$, то есть $z = (z_1, \dots, z_n) = c_b X$. Очевидно, что $z_j = c_j$ при $j = 1, \dots, m$.

В последней строке Δ, начиная с четвертого столбца, записывается разность между элементами предпоследней строки и элементами первой строки: $\Delta = z - c \Leftrightarrow \Delta_i = z_i - c_i$, $i = 1, \dots, n$.

	c		c_1	...	c_m	c_{m+1}	...	c_{j_0}	...	c_n	t
базис		b (x_b)	a^1	...	a^m	a^{m+1}	...	a^{j_0}	...	a^n	
a^1	c_1	x_1	1	...	0	x_{1m+1}	...	x_{1j_0}	...	x_{1n}	t_1
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
a^{i_0}	c_{i_0}	x_{i_0}	0	...	0	x_{i_0m+1}	...	$x_{i_0j_0}$	...	x_{i_0n}	t_{i_0}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
a^m	c_m	x_m	0	...	1	x_{mm+1}	...	x_{mj_0}	...	x_{mn}	t_m
z		$\langle c_b, x_b\rangle$	c_1	...	c_m	$\langle c_b, x^{m+1}\rangle$	...	$\langle c_b, x^{j_0}\rangle$	...	$\langle c_b, x^n\rangle$	
Δ			0	...	0	Δ_{m+1}	...	Δ_{j_0}	...	Δ_n	

4. Исследовать симплексную таблицу.

a) Если $\Delta \geqslant 0$, то крайняя точка x — решение задачи ($x \in \operatorname{Arg} P_k$).

b) Если для некоторого j $\Delta_j < 0$ и $x^j \leqslant 0$, то значение задачи $S_{P_k} = +\infty$;

c) Пусть в строке Δ имеются отрицательные числа, а соответствующие столбцы x^j содержат положительные числа.

Предположим, что $\min\limits_j \Delta_j = \Delta_{j_0} < 0$. Ясно, что $m+1 \leqslant j_0 \leqslant n$. Столбец, соответствующий индексу j_0 называется *разрешающим столбцом*. Если $\min\limits_j \Delta_j$ достигается на нескольких значениях j, то в качестве разрешающего столбца выбираем столбец с любым таким индексом. Обозначим $t_i := \left\{ \dfrac{x_i}{x_{ij_0}} \;\middle|\; x_{ij_0} > 0 \right\} > 0$. Эти значения t_i ставим соответственно в последнем столбце симплексной таблицы. Пусть $t_{i_0} = \min\limits_i t_i > 0$. Строка вектора a^{i_0} называется *разрешающей*. Если $\min\limits_i t_i$ достигается на нескольких значениях i, то в качестве разрешающей строки выбираем любую такую строку. Элемент $x_{i_0j_0}$ называется *разрешающим элементом* симплексной таблицы.

Далее необходимо из числа базисных векторов исключить вектор a^{i_0}, вместо него взять вектор a^{j_0}. Значение функционала на новой крайней точке x' с новыми базисными векторами $a^1, \ldots, a^{i_0-1}, a^{j_0}, a^{i_0+1}, \ldots, a^m$, возрастет на величину $-t_{i_0}\Delta_{j_0}$.

5. Построить новую симплексную таблицу для нового базиса $a^1, \ldots, a^{i_0-1}, a^{j_0}, a^{i_0+1}, \ldots, a^m$, т.е. фактически разложить векторы $b, a^1, \ldots, a^n$, по новому базису. Укажем без обоснования (оно будет приведено в п. 3.3) способ построения новой симплексной таблицы по предыдущей. Элементы таблицы x'_{ij}, лежащие под векторами $b, a^1, \ldots, a^n$, и не лежащие в разрешающей строке старой симплексной таблицы, вычисляются по *правилу прямоугольника*:

$$x'_i = x_i - \frac{x_{i_0} x_{ij_0}}{x_{i_0j_0}}, \quad x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{i_0j} x_{ij_0}}{x_{i_0j_0}}, \quad i \neq i_0,$$

из числа x_{ij} вычесть произведение x_{i_0j} на x_{ij_0}, деленное на $x_{i_0j_0}$. Ясно, что в разрешающем столбце новой симплексной таблицы $x'_{i_0j_0} = 1$, остальные элементы равны нулю ($x'_{ij_0} = 0$, $i \neq i_0$, $i = 1, \ldots, m$). Элементы разрешающей строки новой таблицы вычисляются путем деления элементов разрешающей строки старой таблицы на величину $x_{i_0j_0}$:

$$x'_{i_0} = \frac{x_{i_0}}{x_{i_0j_0}}, \quad x'_{i_0j} = \frac{x_{i_0j}}{x_{i_0j_0}}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Далее необходимо вновь исследовать симплексную таблицу, т.е. вернуться к п. 4 и так далее, пока не придем к решению задачи.

Отметим, что симплекс-метод позволяет решать точно так же и вырожденные задачи линейного программирования. Число положительных координат крайней точки в таких задачах может быть меньше m, но число базисных векторов всегда равняется рангу матрицы A, величина t_{i_0} может оказаться равной нулю.

Теоретически в вырожденных задачах возможно зацикливание, когда через несколько этапов приходим к уже рассмотренной ранее крайней точке и это возвращение может происходить бесконечное число раз. При этом значение целевой функции не меняется и, значит, $t_{i_0} = 0$. Перейти от вырожденной задачи к невырожденной можно путем сколь угодно малого изменения начальных данных задачи.

1.3. Примеры

Приведем задачу, не являющуюся задачей линейного программирования, но путем замены переменных сводящуюся к задаче линейного программирования.

Задача на минимакс

Пусть $f(x) = \max\{l_1(x), \ldots, l_k(x)\}$ — функция n переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$ является максимумом линейных функций. Здесь $l(x) = \langle c^s, x\rangle - d_s$ — линейные функции, $x, c^s \in \mathbf{R}^n$, $d_s \in \mathbf{R}$, $s = 1, \ldots, k$, A — матрица $m \times n$, $b \in \mathbf{R}^m$. Рассмотрим следующую задачу

$$f(x) \to \min; \quad Ax = b, \quad x \geqslant 0. \qquad (P)$$

В отличие от задачи линейного программирования функция $f(x)$ не является линейной. Покажем, что задача (P) эквивалентна задаче линейного программирования

$$x_{n+1} \to \min; \quad l_s(x) \leqslant x_{n+1}, \quad s = 1, \ldots, k, \quad Ax = b, \quad x \geqslant 0. \qquad (P')$$

Действительно, если $\hat{x} \in \operatorname{Arg} P$, то $(\hat{x}, \hat{x}_{n+1} := f(\hat{x})) \in \operatorname{Arg} P'$. (Если допустить, что вектор $(\hat{x}, f(\hat{x})) \notin \operatorname{Arg} P'$, то существует вектор $\tilde{x} \in D(P)$ такой, что $f(\tilde{x}) < f(\hat{x}) \Rightarrow \hat{x} \notin \operatorname{Arg} P$ — противоречие.)

С другой стороны, если $(\hat{x}, \hat{x}_{n+1}) \in \operatorname{Arg} P'$, то $\hat{x} \in \operatorname{Arg} P$. (Если допустить, что $\hat{x} \notin \operatorname{Arg} P$, то существует вектор $\tilde{x} \in D(P)$ такой, что $f(\tilde{x}) < f(\hat{x})$. Значит, вектор $(\tilde{x}, f(\tilde{x}) \in D(P')$ и $\tilde{x}_{n+1} < \hat{x}_{n+1} \Rightarrow (\hat{x}, \hat{x}_{n+1}) \notin \operatorname{Arg} P'$ — противоречие.)

Пример 1. Решить невырожденную задачу линейного программирования в канонической форме

$$2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to \max; \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1,2,3,4,$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 \quad\quad &= 1, \\ 2x_1 + x_2 \quad\quad + x_4 &= 3, \end{aligned}$$

с заданной начальной крайней точкой $x = (0,0,1,3)$.

Решение. Базисные векторы $a^3 = (1,0)$ и $a^4 = (0,1)$. Составим первую симплексную таблицу

	c		2	1	1	−1	t
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	a^4	
a^3	1	1	1	−1	1	0	
a^4	−1	3	2	1	0	1	3
z		−2	−1	−2	1	−1	
Δ			−3	−3	0	0	

Из таблицы видно, что в качестве разрешающего столбца можно взять столбцы a^1 и a^2. Возьмем для определенности столбец a^2. Тогда $t = 3$, разрешающая строка a^4. Заменяем в базисе вектор a^4 на вектор a^2 и для нового базиса строим вторую симплексную таблицу:

	c		2	1	1	−1	t
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	a^4	
a^3	1	4	3	0	1	1	
a^2	1	3	2	1	0	1	
z		7	5	1	1	2	
Δ			3	0	0	3	

Вектор $\Delta \geqslant 0$, поэтому точка $\hat{x} = (0,3,4,0)$ является решением задачи и $S_{\max} = 7$.

Если бы в качестве разрешающего столбца в первой симплексной таблице взяли столбец a^1, то пришли бы к той же точке $(0,3,4,0)$, но за большее число шагов.

Пример 2. Решить задачу линейного программирования

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \to \max; \ x_i \geqslant 0, \ i = 1,\ldots,6,$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \quad\quad + 6x_6 &= 9, \\ x_2 + x_3 + x_4 \quad\quad + x_6 &= 3, \\ x_3 + x_4 - x_5 + 2x_6 &= 1, \\ x_4 \quad\quad + x_6 &= 1, \end{aligned}$$

с заданной начальной крайней точкой $x = (1,2,0,0,1,1)$.

Решение. Базисные векторы $a^1 = (1,0,0,0)$, $a^2 = (1,1,0,0)$, $a^5 = (0,0,-1,0)$ и $a^6 = (6,1,2,1)$. Матрица $A_b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ не является единичной, поэтому найдем для нее обратную матрицу. Для этого записываем рядом две матрицы: нашу матрицу A_b и единичную. Далее сводим матрицу A_b к единичной путем элементарных преобразований строк. Полученная в результате преобразований матрица на месте единичной матрицы и является обратной к нашей матрице A_b.

Напомним, что *элементарными преобразованиями матрицы* являются: а) перестановка двух строк; b) умножение строки на число отличное от нуля и с) прибавление к одной строке другой строки, умноженной на любое число.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

На первом этапе мы умножили третью строку на -1, из первой строки вычли вторую. На втором этапе из первой строки вычли четвертую, умноженную на 5. На третьем этапе из второй строки вычли четвертую, а к третьей строке прибавили удвоенную четвертую.

Таким образом, получили, что $A_b^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Далее находим разложения векторов a^3, a^4 по базису a^1, a^2, a^5, a^6:

$$x^3 = A_b^{-1}a^3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x^4 = A_b^{-1}a^4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Разложением вектора b является вектор $(1, 2, 1, 1)$ ненулевых координат крайней точки. Составим первую симплексную таблицу

	c		1	1	1	1	1	1	t
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	
a^1	1	1	1	0	1	−3	0	0	
a^2	1	2	0	1	1	0	0	0	
a^5	1	1	0	0	−1	1	1	0	1
a^6	1	1	0	0	0	**1**	0	1	1
z		5	1	1	1	−1	1	1	
Δ			0	0	0	−2	0	0	

Разрешающий столбец a^4. В качестве разрешающей строки можно взять строки a^5 и a^6. Возьмем для определенности строку a^6. Тогда $t = 1$, разрешающая строка a^6. Заменяем в базисе вектор a^6 на вектор a^4 и для нового базиса строим вторую симплексную таблицу:

	c		1	1	1	1	1	1	t
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	
a^1	1	4	1	0	1	0	0	3	
a^2	1	2	0	1	1	0	0	0	
a^5	1	0	0	0	−1	0	1	−1	
a^4	1	1	0	0	0	1	0	1	
z		7	1	1	1	1	1	3	
Δ			0	0	0	0	0	2	

Вектор $\Delta \geqslant 0$, поэтому точка $\hat{x} = (4, 2, 0, 1, 0, 0)$ является решением задачи и $S_{\max} = 7$. Полученная крайняя точка содержит только три положительные координаты. Значит, решенная нами задача является вырожденной.

1.4. Задачи

Задачи линейного программирования в канонической форме с заданной первоначальной крайней точкой.

1.1.
$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 \to \max; \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1,2,3, \\ & -x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ & 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \qquad x_0 = (0,1,1). \end{aligned}$$

1.2.
$$\begin{aligned} & 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max; \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1,2,3,4, \\ & x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 4, \\ & x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \qquad x_0 = (0,0,1,1). \end{aligned}$$

1.3.
$$\begin{aligned} & 6x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 \to \max; \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1,2,3,4, \\ & 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ & 5x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4, \qquad x_0 = (1,0,0,1). \end{aligned}$$

1.4.
$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max; \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1,2,3,4, \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ & 2x_1 - x_3 + x_4 = 1, \qquad x_0 = (0,1,0,1). \end{aligned}$$

1.5.
$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \max; \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1,\dots,5, \\ & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 19, \\ & x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 = 2, \qquad x_0 = (0,0,1,2,0). \end{aligned}$$

1.6.
$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max; \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1,2,3,4, \\ & x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ & x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ & x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \qquad x_0 = (0,0,0,1). \end{aligned}$$

1.7.
$$\begin{aligned} & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 \to \max; \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1,\dots,5, \\ & x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 + 9x_5 = 18, \\ & x_1 + 5x_2 + 2x_4 + 8x_5 = 13, \\ & x_3 + x_5 = 3, \qquad x_0 = (0,1,2,0,1). \end{aligned}$$

1.8.
$$\begin{aligned} & x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6 \to \max; \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1,\dots,6, \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 2x_6 = 7, \\ & x_1 - x_3 + x_5 - x_6 = -2, \\ & x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6 = 5, \qquad x_0 = (0,0,2,0,1,1). \end{aligned}$$

1.9.
$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 - 2x_6 + x_7 \to \max; \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_6 + x_7 = 8, \\ & x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_6 + 3x_7 = 15, \\ & x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 - 3x_6 + 3x_7 = 11, \\ & x_3 + 3x_4 + x_5 - 2x_6 + x_7 = 5, \\ & x_i \geqslant 0, \quad i = 1,\dots,7, \qquad x_0 = (1,0,0,1,0,1,4). \end{aligned}$$

§ 2. Двойственность в линейном программировании

2.1. Элементы выпуклого анализа. Преобразование Лежандра

Напомним определение выпуклого множества и выпуклой функции. Множество $A \subset \mathbf{R}^n$ называется *выпуклым*, если для любых двух точек a_1 и a_2 из A и любого числа $t \in (0, 1)$ элемент $ta_1 + (1-t)a_2 \in A$.

Пусть задана функция $f\colon \mathbf{R}^n \to \overline{\mathbf{R}}\colon = \mathbf{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. С каждой такой функцией f связываются два множества:

$\operatorname{dom} f\colon = \{x \mid f(x) < +\infty\}$ — *эффективное множество* и

$\operatorname{epi} f\colon = \{(a, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \mid a \geqslant f(x)\}$ — *надграфик* f.

Функция f называется *выпуклой*, если надграфик f — выпуклое множество. Функция f называется *замкнутой*, если надграфик f — замкнутое множество. Функция f называется *собственной*, если $f(x) > -\infty$ $\forall\, x$ и $\operatorname{dom} f \neq \varnothing$.

Ясно, что сумма двух выпуклых функций является функцией выпуклой. Но суперпозиция двух выпуклых функций не всегда является выпуклой функцией. Попробуйте привести пример!

Пусть $f\colon \mathbf{R}^n \to \overline{\mathbf{R}}$ — некоторая функция. *Преобразованием Лежандра* функции f (или *сопряженной* функцией к f) называется функция

$$f^*(y)\colon = \max_x \{\langle x, y\rangle - f(x)\}.$$

Из определения f^* видно, что f^* — верхняя грань семейства аффинных функций $\langle x, y\rangle - f(x)$. Ее надграфик является выпуклым множеством (как пересечение выпуклых множеств — полупространств). Следовательно, f^* — выпуклая функция. Из определения сопряженной функции следует *неравенство Юнга*:

$$\langle x, y\rangle \leqslant f(x) + f^*(y) \quad \forall\, x, y \in \mathbf{R}^n.$$

Функция $f^{**}(x)\colon = \max\limits_y \{\langle x, y\rangle - f^*(y)\}$, являющаяся сопряженной к f^*, называется *второй сопряженной* к f.

В теории двойственности для задач линейного программирования важной является следующая теорема выпуклого анализа.

Теорема Фенхеля—Моро. [Гл. 6, п. 0.3.] *Собственная функция совпадает со своей второй сопряженной ($f(x) \equiv f^{**}(x)$) тогда и только тогда, когда она выпукла и замкнута (т. е. когда ее надграфик* $\operatorname{epi} f$ *— выпуклое и замкнутое множество).*

2.2. Примеры

Пример 1. Найти первую и вторую сопряженные (в смысле Лежандра) функции к функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ в зависимости от значений параметров a, b, c.

Решение. По определению сопряженной функции

$$f^*(y) = \max_x \{\langle x, y\rangle - f(x)\} = \max_x \{xy - ax^2 - bx - c\} = \\ = \max_x \{-ax^2 + (y-b)x - c\}.$$

Если $a > 0$, то парабола $-ax^2 + (y-b)x - c = -a\left(x - \frac{y-b}{2a}\right)^2 + \frac{(y-b)^2}{4a} - c$ достигает своего максимума $\frac{(y-b)^2}{4a} - c$ при $x = \frac{y-b}{2a}$. Поэтому

$$f^*(y) = \frac{(y-b)^2}{4a} - c.$$

Найдем вторую сопряженную к f. По определению

$$f^{**}(x)\colon = \max_y \{\langle x, y\rangle - f^*(y)\} = \max_y\left\{xy - \frac{(y-b)^2}{4a} + c\right\} = \\ = \max_y\left\{-\frac{(y-b-2ax)^2}{4a} + ax^2 + bx + c\right\}.$$

Парабола $u(y)\colon = -\frac{(y-b-2ax)^2}{4a} + ax^2 + bx + c$ достигает своего максимума при $y = b + 2ax$. Следовательно,

$$f^{**}(x) = \max_y\left\{-\frac{(y-b-2ax)^2}{4a} + ax^2 + bx + c\right\} = ax^2 + bx + c.$$

Если $a = 0$, то функция $(y-b)x - c \to +\infty$, если $y \neq b$, при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$. Поэтому

$$f^*(y) = \max_x \{(y-b)x - c\} = \begin{cases} -c, & y = b, \\ +\infty, & y \neq b. \end{cases}$$

Найдем вторую сопряженную к f. Нетрудно видеть, что

$$f^{**}(x)\colon = \max_y \{\langle x, y\rangle - f^*(y)\} = \max_y \left\{xy - \begin{cases} -c, & y = b, \\ +\infty, & y \neq b. \end{cases}\right\} = bx + c.$$

Если $a < 0$, то парабола $-ax^2 + (y-b)x - c$ с осями, направленными вверх, стремится к $+\infty$ при $x \to +\infty$. Значит, $f^*(y) = +\infty$. Найдем вторую сопряженную к f. Нетрудно видеть, что

$$f^{**}(x)\colon = \max_y \{\langle x, y\rangle - f^*(y)\} = \max_y \{xy - (+\infty)\} = -\infty.$$

4 Зак. 60

Пример 2. Найти первую и вторую сопряженные (в смысле Лежандра) функции к функции $f(x) = e^x$.

Решение. По определению сопряженной функции

$$f^*(y) = \max_x \{\langle x, y\rangle - f(x)\} = \max_x \{xy - e^x\} = \max_x g(x),$$

где $g(x) := xy - e^x$. Найдем максимум функции $g(x)$. Имеем $g'(x) = y - e^x = 0 \Leftrightarrow x = \ln y$ при $y > 0$. Поскольку $g''(x) = -e^x < 0$, то по достаточному условию экстремума гладкой функции при $y > 0$ в этой точке будет достигаться максимум этой функции. Подставляя $x = \ln y$ в $g(x)$, находим, что $\max_x g(x) = y \ln y - y$.

Если $y = 0$, то очевидно, что $\max_x g(x) = \max_x \{-e^x\} = 0$. Если $y < 0$, то $g(x) \to +\infty$ при $x \to -\infty$. Таким образом,

$$f^*(y) = \max_x \{xy - e^x\} = \begin{cases} y \ln y - y, & y > 0, \\ 0, & y = 0, \\ +\infty, & y < 0. \end{cases}$$

Найдем вторую сопряженную к f. По определению

$$f^{**}(x) := \max_y \{\langle x, y\rangle - f^*(y)\} = \max_y \left\{ xy - \begin{cases} y \ln y - y, & y > 0, \\ 0, & y = 0, \\ +\infty, & y < 0 \end{cases} \right\} = \\ = \max \{\max_{y>0} \{xy - y \ln y + y\}, 0\}.$$

Нетрудно видеть, что функция $u(y) := xy - y \ln y + y$ достигает своего максимума при $y > 0$ в точке обращения в нуль своей производной. Действительно,

$$u'(y) = x - \ln y - 1 + 1 = x - \ln y = 0 \Leftrightarrow y = e^x,$$
$$u''(y) = -\frac{1}{y} < 0 \quad \text{при} \quad y > 0.$$

Подставляя это значение y в выражение для $f^{**}(x)$, получаем

$$f^{**}(x) = \max \{\max_{y>0} \{xy - y \ln y + y\}, 0\} = \max \{e^x, 0\} = e^x.$$

Равенство $f^{**}(x) = f(x) = e^x$ следует также непосредственно из теоремы Фенхеля—Моро, поскольку функция e^x является выпуклой и замкнутой.

2.3. Вывод двойственных задач

2.3.1. Вывод задачи двойственной к задаче в общей форме

Рассмотрим задачу линейного программирования в общей форме

$$\langle c, x\rangle \to \min; \quad Ax \leqslant b. \qquad (P)$$

Обозначим через $S(b) := \min_x \{\langle c, x\rangle \mid Ax \leqslant b\}$ — S-функцию задачи (P), рассматривая аргумент b как параметр в задаче (P).

Определение. *Двойственной задачей* к задаче линейного программирования в общей форме называется задача нахождения второй сопряженной (в смысле Лежандра) функции $S^{**}(b)$ для S-функции задачи (P).

Для нахождения второй сопряженной необходимо найти вначале первую сопряженную функцию к функции $S(b)$:

$$S^*(y) = \max_b\{\langle y, b\rangle - S(b)\} = \max_b\{\langle y, b\rangle - \min_x\{\langle c, x\rangle \mid Ax \leqslant b\}\} =$$
$$= \max_{b,x}\{\langle y, b\rangle - \langle c, x\rangle \mid Ax \leqslant b\} = \begin{cases} \max_x\{\langle y, Ax\rangle - \langle c, x\rangle\}, & y \leqslant 0, \\ +\infty, & \text{иначе} \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} \max_x\{\langle A^*y - c, x\rangle\}, & y \leqslant 0, \\ +\infty, & \text{иначе} \end{cases} = \begin{cases} 0, & A^*y = c, \ y \leqslant 0, \\ +\infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найдем сопряженную в смысле Лежандра функцию к функции $S^*(y)$, т. е. вторую сопряженную к функции $S(b)$:

$$S^{**}(b) = \max_y\{\langle y, b\rangle - S^*(y)\} = \max_y\{\langle y, b\rangle \mid A^*y = c, \ y \leqslant 0\}.$$

Таким образом, двойственной задачей к задаче линейного программирования в общей форме является следующая задача:

$$\langle b, y\rangle \to \max; \quad A^*y = c, \quad y \leqslant 0. \qquad (P^{**})$$

Для задачи линейного программирования в нормальной форме:

$$\langle c, x\rangle \to \max; \quad Ax \leqslant b, \quad x \geqslant 0, \qquad (P_n)$$

выпишем без доказательства двойственную задачу (попробуйте сделать это самостоятельно):

$$\langle b, y\rangle \to \min; \quad A^*y \geqslant c, \quad y \geqslant 0. \qquad (P_n^{**})$$

Как мы видим, двойственная задача в этом случае обладает определенной симметрией по отношению к исходной. Элементы b и c меняются местами, максимум меняется на минимум, матрица A меняется на транспонированную, и матричное неравенство меняет знак.

2.3.2. Вывод задачи двойственной к двойственной задаче для задачи линейного программирования в общей форме

Покажем, что понятие «двойственности» введено правильно, т. е. двойственная задача к двойственной является исходной задачей.

$$\langle b, y\rangle \to \max; \quad A^*y = c, \quad y \leqslant 0. \qquad (P^{**})$$

Для того, чтобы вывести двойственную задачу к задаче (P^{**}) надо вначале свести ее к задаче линейного программирования в общей форме, для которой уже известна двойственная задача.

Вначале сведем задачу на минимум. Затем заменим равенство $A^*y = c$ на два неравенства $c \leqslant A^*y \leqslant c \Leftrightarrow A^*y \leqslant c,\ -A^*y \leqslant -c$. Получим эквивалентную задачу линейного программирования в общей форме:

$$\langle -b, y\rangle \to \min; \quad \begin{pmatrix} A^* \\ -A^* \\ I \end{pmatrix} y \leqslant \begin{pmatrix} c \\ -c \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Двойственная к ней будет следующая задача:

$$\langle (c, -c, 0), (x^1, x^2, x^3)\rangle \to \max;$$

$$(A \ \ {-A} \ \ I) \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = -b, \quad x^1 \leqslant 0, \quad x^2 \leqslant 0, \quad x^3 \leqslant 0.$$

Перепишем эту задачу в виде

$$\langle c, x^1 - x^2\rangle \to \max; \quad A(x^1 - x^2) + x^3 = -b, \quad x^1 \leqslant 0, \quad x^2 \leqslant 0, \quad x^3 \leqslant 0.$$

Обозначая $x = x^2 - x^1$, и учитывая, что равенство $A(x^1 - x^2) + x^3 = -b$ эквивалентно неравенству $A(x^1 - x^2) \geqslant -b$, поскольку $x^3 \leqslant 0$, а ограничений на знак x уже не будет, получим

$$-\langle c, x\rangle \to \max; \quad -Ax \geqslant -b.$$

Заменяя max на min и умножая матричное неравенство на -1, придем к задаче, являющейся двойственной к задаче (P^{**}), которая совпадает с исходной задачей (P)

$$\langle c, x\rangle \to \min; \quad Ax \leqslant b. \qquad (P)$$

Таким образом, мы убедились, что термин «двойственная задача» используется правильно.

2.3.3. Вывод задачи двойственной к задаче в канонической форме

Задачу линейного программирования в канонической форме

$$\langle c, x\rangle \to \max; \quad Ax = b, \quad x \geqslant 0, \qquad (P_k)$$

сведем ее к задаче на минимум:

$$\langle -c, x\rangle \to \min; \quad Ax = b, \quad x \geqslant 0, \qquad (P')$$

при этом $S_{P_k} = -S_{P'}$.

Обозначим через $S(b)\colon = \min\limits_x \{\langle -c, x\rangle \mid Ax = b,\ x \geqslant 0\}$ — S-функцию задачи (P'), рассматривая аргумент b как параметр в задаче (P').

Найдем первую сопряженную функцию к функции $S(b)$:

$$S^*(b^*) = \max_b \{\langle b^*, b\rangle - S(b)\} = \max_b \{\langle b^*, b\rangle - \min_x \{\langle -c, x\rangle \mid Ax = b,\ x \geqslant 0\}\} =$$

$$= \max_{b,x} \{\langle b^*, b\rangle + \langle c, x\rangle \mid Ax = b,\ x \geqslant 0\} = \max_x \{\langle b^*, Ax\rangle + \langle c, x\rangle \mid x \geqslant 0\} =$$

$$= \max_x \{\langle A^*b^* + c, x\rangle \mid x \geqslant 0\} = \begin{cases} 0, & A^*b^* + c \leqslant 0, \\ +\infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найдем сопряженную в смысле Лежандра функцию к функции $S^*(b^*)$, т. е. вторую сопряженную к функции $S(b)$:

$$S^{**}(b) = \max_{b^*} \{\langle b^*, b\rangle - S^*(b^*)\} = \max_{b^*} \{\langle b^*, b\rangle \mid A^*b^* + c \leqslant 0\} \Rightarrow$$

$$S_{P_k^{**}} = -S^{**}(b) = \min_{b^*} \{\langle -b^*, b\rangle \mid A^*b^* + c \leqslant 0\}.$$

Полагая $y = -b^*$, получаем $S_{P_k^{**}} = \min\limits_y \{\langle y, b\rangle \mid -A^*y + c \leqslant 0\}$, и, следовательно, имеем следующую двойственную задачу

$$\langle y, b\rangle \to \min; \quad A^*y \geqslant c. \qquad (P_k^{**})$$

2.3.4. Упражнения

1. Вывести двойственную задачу для задачи линейного программирования в нормальной форме с помощью преобразования Лежандра.

2. Вывести двойственную задачу для задачи линейного программирования в нормальной форме путем сведения ее к общей задаче линейного программирования.

3. Вывести двойственную задачу для задачи линейного программирования в канонической форме путем сведения ее к общей задаче линейного программирования.

4. Показать, что для задачи $\langle c, x\rangle \to \min;\ Ax = b,\ x \geqslant 0$, двойственной является задача $\langle y, b\rangle \to \max;\ A^*y \leqslant c$.

§ 3. Обоснование симплекс-метода

3.1. Теоремы существования, двойственности, критерий решения

Приведем три теоремы, играющие важную роль при обосновании симплекс-метода.

Рассмотрим задачу линейного программирования в общей форме

$$\langle c, x\rangle \to \min; \quad Ax \leqslant b, \qquad (P)$$

где $c, x \in \mathbf{R}^n$, $b \in \mathbf{R}^m$, матрица размеров $m \times n$ $A = (a_i^j)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} =$

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_m^1 & \dots & a_m^n \end{pmatrix} \text{ со столбцами } a^j = \begin{pmatrix} a_1^j \\ \dots \\ a_m^j \end{pmatrix}, \; j = 1, \dots, n.$$

Обозначим S_P — численное значение задачи (P), $\operatorname{Arg} P$ — множество решений задачи (P), т. е. множество допустимых точек $x \in \mathbf{R}^n$, для которых $\langle c, x\rangle = S_P$.

Теорема существования. *Если численное значение задачи (P) конечно ($|S_P| < +\infty$), то ее решение существует ($\operatorname{Arg} P \neq \varnothing$).*

Доказательство. Отметим сразу, что поскольку численное значение задачи конечно, то множество допустимых элементов непусто ($D(P) \neq \varnothing$). Рассмотрим множество

$$K := \bigl\{(\alpha, z) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^m \mid \exists\, x : \langle c, x\rangle \leqslant \alpha,\; Ax \leqslant z\bigr\}.$$

Ясно, что K — выпуклый конус.

Напомним ряд сведений из выпуклого анализа.

Пусть $C := \{c_1, \dots, c_m\} \subset \mathbf{R}^n$ — некоторое конечное подмножество. Элемент $v = \sum\limits_{i=1}^{m} t_i c_i$, $t_i \geqslant 0$, $i = 1, \dots, m$, $\sum\limits_{i=1}^{m} t_i = 1$, называется *выпуклой комбинацией* C, а элемент $k = \sum\limits_{i=1}^{m} t_i c_i$, $t_i \geqslant 0$, $i = 1, \dots, m$, — *конической комбинацией* C.

Совокупность всех выпуклых (конических) комбинаций конечных подмножеств множества C называется *выпуклой (конической) оболочкой* C и обозначается $\operatorname{co} C$ ($\operatorname{cone} C$).

Можно легко показать, что множество $\operatorname{co} C$ совпадает с пересечением всех выпуклых множеств, содержащих C (иногда это свойство берут за определение $\operatorname{co} C$), а множество $\operatorname{cone} C$ совпадает с пересечением всех выпуклых конусов, содержащих C.

Выпуклая оболочка конечного числа точек называется *выпуклым многогранником*, а выпуклая коническая оболочка конечного числа точек — *конечнопорожденным конусом*.

Лемма 1. *Конус K — конечнопорожденный.*

Доказательство леммы 1. Покажем, что $K = \operatorname{cone}\{\pm\xi_1, \dots, \pm\xi_n, \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_m\}$, где $\xi_j = (c_j, a_1^j, \dots, a_m^j)$, $j = 1, \dots, n$, $\eta_0 = (1, 0, \dots, 0)$, $\eta_1 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \eta_m = (0, 0, \dots, 1)$.

Вложение $\operatorname{cone}\{\pm\xi_1, \dots, \pm\xi_n, \eta_0, \dots, \eta_m\} \subset K$, следует из того, что все образующие конуса лежат в K. Действительно, полагая $x = \pm e_j$ ($e_1, \dots, e_n$ — канонический базис в $\mathbf{R}^n$) в определении конуса K, мы получим, что $\pm\xi_j \in K$, $j = 1, \dots, n$; для векторов η_i надо взять $x = 0$.

Обратно, если вектор $(\alpha, z) = (\alpha, z_1, \dots, z_m) \in K$, то существует $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, для которого $\langle c, x\rangle \leqslant \alpha$, $Ax \leqslant z$. Значит для некоторых $\beta_0 \geqslant 0, \dots, \beta_m \geqslant 0$ выполняются соотношения

$$\langle c, x\rangle + \beta_0 = \alpha, \quad Ax + \beta = z \quad (\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)) \iff$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \beta_0 = \alpha, \quad \sum_{j=1}^{n} a_i^j x_j + \beta_i = z_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Но это как раз и означает, что

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \xi_j + \sum_{i=0}^{m} \beta_i \eta_i = (\alpha, z).$$

Поскольку $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j \xi_j = \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j| (\operatorname{sign} x_j \cdot \xi_j)$, то $(\alpha, z) \in \operatorname{cone}\{\pm\xi_1, \dots, \pm\xi_n, \eta_0, \dots, \eta_m\}$. ∎

Лемма 2 (о замкнутости конечнопорожденного конуса). *Конечнопорожденный конус замкнут.*

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по числу m порождающих точек. Если $m = 1$, то конус $K = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x = tk_1,\, t \geqslant 0\}$ — полупрямая, очевидно, замкнутая. Пусть теорема верна для конусов, порожденных $m-1$ точкой, $m \geqslant 2$, и пусть заданы m точек $k_1, \dots, k_m$. Если конус $K = \operatorname{cone}\{k_1, \dots, k_m\}$ содержит векторы $-k_1, \dots, -k_m$, то K — конечномерное подпространство, т. е. замкнутое множество. В противном случае существует вектор (пусть это будет $-k_m$), который не принадлежит K ($-k_m \notin K$). Обозначим $K' := \operatorname{cone}\{k_1, \dots, k_{m-1}\}$. По предположению индукции конус K' замкнут и $K = \{k \mid k = k' + tk_m,\; k' \in K',\; t \geqslant 0\}$. Пусть $\{k^n := k'^n + t^n k_m\}_{n \in \mathbf{N}}$ — последовательность векторов из K, сходящаяся к $\bar{k} \in \mathbf{R}^n$ ($k^n \to \bar{k}$). Из последовательности $\{t^n\}$ выберем сходящуюся подпоследовательность $\{t^{n_i}\} \to \hat{t} \geqslant 0$. Имеются две возможности: либо $\hat{t}$ конечное число, либо $\hat{t} = +\infty$. В первом случае получим, что числа $k'^{n_i} = k^{n_i} - t^{n_i} k_m \to \bar{k} - \hat{t} k_m \in K'$ (в силу замкнутости конуса K'), т. е. $\bar{k} \in K$ и, следовательно, K замкнуто. Во втором случае, деля k^{n_i} на t^{n_i}, имеем: $\frac{k'^{n_i}}{t^{n_i}} + k_m = \frac{k^{n_i}}{t^{n_i}} \to 0$ при $i \to \infty$ ($\{k^{n_i}\}$ — сходящаяся последовательность, $\{t^{n_i}\} \to +\infty$). Откуда $\frac{k'^{n_i}}{t^{n_i}}$ сходится к $-k_m$, что невозможно так как $-k_m \notin K'$. ■

Поскольку $S_P = \min\left\{\alpha \mid \exists\ x : \langle c, x\rangle = \alpha,\ \ Ax \leqslant b\right\} =: \hat{\alpha}$, то существуют последовательности $\{x_k\}$ и $\{\alpha_k\}$, $\alpha_k \to \hat{\alpha}$ при $k \to +\infty$, для которых $\langle c, x_k\rangle = \alpha_k$, $Ax_k \leqslant b$ (это означает, что последовательность точек $(\alpha_k, b) \in K$ — замкнутому по лемме 2 множеству. Поэтому предельная точка $(\hat{\alpha}, b) \in K$. Тогда по определению множества K существует точка $\hat{x}$ такая, что $\langle c, \hat{x}\rangle \leqslant \hat{\alpha} = S_P$, $A\hat{x} \leqslant b$. Это означает, что $\hat{x} \in \operatorname{Arg} P$. Теорема существования доказана. ■

Вернемся к задаче линейного программирования в общей форме. В п. 2.3 мы обозначили через $S(b) := \min\limits_x \left\{\langle c, x\rangle \mid Ax \leqslant b\right\}$ — S-функцию задачи (P), рассматривая аргумент b как параметр в задаче (P).

Лемма 3. *S — выпуклая замкнутая функция.*

Доказательство леммы легко выводится из соотношения $\operatorname{epi} S = K$, где K — выпуклый замкнутый конус, рассмотренный при доказательстве теоремы существования. ■

Лемма 4. *Пусть $f\colon \mathbf{R}^n \to \overline{\mathbf{R}}$ — выпуклая замкнутая функция и существует точка z_0 такая, что $f(z_0) = -\infty$. Тогда $f(z) = -\infty\ \forall\ z \in \operatorname{dom} f$.*

Напомним, что двойственной задачей к задаче линейного программирования в общей форме является следующая задача:

$$\langle b, y\rangle \to \max; \quad A^* y = c, \quad y \leqslant 0. \qquad (P^{**})$$

Теорема двойственности. *Для пары двойственных задач линейного программирования (P) и (P^{**}) имеет место следующая альтернатива: или значение одной из задач конечно (и тогда конечно значение другой и оба значения совпадают), или множество допустимых элементов в одной из задач пусто (и тогда другая задача либо несовместна, либо имеет бесконечное значение).*

Доказательство. 1) Пусть $|S(b)| < \infty$, тогда поскольку по лемме 3 S — выпуклая замкнутая функция, то по лемме 4 $S(z) > -\infty\ \forall\ z \in \mathbf{R}^m$. По теореме Фенхеля—Моро п. 2.1 $S^{**}(b) = S(b)$. Это означает, что конечно значение двойственной задачи и оба значения совпадают.

2) Пусть $D_P = \varnothing$ ($\Leftrightarrow S(b) = +\infty$), тогда либо а) существует точка z_0 такая, что $S(z_0) = -\infty$, тогда $S^* \equiv +\infty$, следовательно, $S^{**} \equiv -\infty$, т. е. $D_{P^{**}} = \varnothing$ (это означает, что множество допустимых элементов в двойственной задаче пусто), либо b) $S(z) > -\infty\ \forall\ z \in \mathbf{R}^m$, тогда по теореме Фенхеля—Моро $S^{**}(b) = S(b) = +\infty$ (это означает, что двойственная задача имеет бесконечное значение). ■

Критерий решения. *Пусть $\hat{x}, \hat{y}$ — допустимые элементы в задачах (P) и (P^{**}) соответственно ($\hat{x} \in D(P)$, $\hat{y} \in D(P^{**})$). Тогда точки $\hat{x}, \hat{y}$ являются решениями в задачах (P) и (P^{**}) соответственно ($\hat{x} \in \operatorname{Arg} P$, $\hat{y} \in \operatorname{Arg} P^{**}$) тогда и только тогда, когда*

$$\langle c, \hat{x}\rangle = \langle \hat{y}, b\rangle.$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\hat{y} \in \operatorname{Arg} P^{**}$, тогда $\hat{y} \in D(P^{**})$ и $\langle \hat{y}, b\rangle = S_{P^{**}}$. Аналогично, $\hat{x} \in \operatorname{Arg} P$, тогда $\hat{y} \in D(P^{**})$ и $\langle c, \hat{x}\rangle = S_P$. Значение задачи (P) при этом конечно ($|S_P| < +\infty$). Значит по теореме двойственности значение двойственной задачи также конечно и оба значения совпадают ($S_P = S_{P^{**}}$). Следовательно, $\langle c, \hat{x}\rangle = \langle \hat{y}, b\rangle$.

Достаточность. Пусть $\hat{x} \in D(P)$, $\hat{y} \in D(P^{**})$ и $\langle c, \hat{x}\rangle = \langle \hat{y}, b\rangle$. Возьмем произвольные допустимые элементы $x \in D(P)$, $y \in D(P^{**})$. Это означает, что $Ax \leqslant b$, $A^* y = c$, $y \leqslant 0$. В силу этих условий на x и y имеем

$$\langle c, x\rangle = \langle A^* y, x\rangle = \langle y, Ax\rangle \geqslant \langle y, b\rangle.$$

Из этого соотношения вытекает, что $\langle c, x\rangle \geqslant \langle \hat{y}, b\rangle = \langle c, \hat{x}\rangle\ \forall\ x \in D(P)$. Это означает, что $\hat{x} \in \operatorname{Arg} P$. Аналогично доказывается, что $\hat{y} \in \operatorname{Arg} P^{**}$. ■

3.2. Свойства множества допустимых точек

Рассмотрим задачу линейного программирования в канонической форме

$$\langle c, x\rangle \to \max; \quad Ax = b, \quad x \geqslant 0. \qquad (P_k)$$

Предложение 1. *Пусть $x = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^n$, $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, k$, — допустимая точка в задаче (P_k) $\left(x \in D(P_k)\right)$. Тогда точка x является крайней точкой множества допустимых элементов $D(P_k)$ тогда и только тогда, когда столбцы $a^1, \ldots, a^k$ матрицы A линейно независимы.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть x — крайняя точка. Докажем, что тогда столбцы $a^1, \ldots, a^k$ — линейно независимы. Доказательство будем вести от противного. Допустим противное, что столбцы $a^1, \ldots, a^k$ — линейно зависимы. Тогда существует ненулевой набор множителей $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ такой, что $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i a^i = 0$. Значит $A\lambda = 0$ для вектора

$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^n$. Поэтому точка $x(t) := x + t\lambda \in D_{P_k}$ при малых t как больше, так и меньше нуля. Это означает, что точка x не является крайней. Получили противоречие. Значит, наше допущение, что столбцы $a^1, \ldots, a^k$ линейно зависимы — неверно. То есть столбцы $a^1, \ldots, a^k$ линейно независимы.

Достаточность. Пусть столбцы, соответствующие положительным координатам точки x линейно независимы. Для определенности будем считать, что это столбцы $a^1, \ldots, a^k$. Докажем, что тогда x — крайняя точка. Доказательство вновь будем вести от противного. Допустим противное, что x не является крайней точкой. Тогда существуют точки $y \in D(P_k)$ и $z \in D(P_k)$, $y \neq z$, отличные от x и число $t \in (0, 1)$ такие, что $x = ty + (1-t)z$. Из этого равенства и условий $x = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$, $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, k$, $y, z \geqslant 0$ следует, что $y = (y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0)$, $z = (z_1, \ldots, z_k, 0, \ldots, 0)$. А из условий $Ay = b \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} y_i a^i = b$, $Az = b \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} z_i a^i = b$ следует, что $\sum_{i=1}^{k} (y_i - z_i) a^i = 0$. Это означает, что столбцы $a^1, \ldots, a^k$ линейно зависимы. Получили противоречие. Значит, наше допущение, что x не является крайней точкой — неверно. То есть x является крайней точкой.

Поскольку количество линейно независимых столбцов не может превышать количества строк матрицы A, то крайняя точка содержит не более m положительных элементов. ■

Предложение 2. *Пусть (P_k) — невырожденная задача линейного программирования в канонической форме, $x = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^n$, $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, k$, — допустимая точка в задаче (P_k) $(x \in D(P_k))$. Тогда* a) $k \geqslant m$; b) *точка x является крайней точкой множества допустимых элементов $D(P_k)$ тогда и только тогда, когда $k = m$.*

Доказательство. a) Доказательство будем вести от противного. Допустим противное, что существует допустимая точка, у которой менее m положительных координат. Для определенности пусть это первые k координат $(k < m)$. Рассмотрим множество $D = \{y \in \mathbf{R}^k \mid \overline{A}y = b,\ y \geqslant 0\}$, где $\overline{A} := \{a^1, \ldots, a^k\}$ — матрица, состоящая из первых k столбцов исходной матрицы A. Отметим, что множество D непусто. Пусть $\hat{y}$ — крайняя точка множества D (докажите самостоятельно ее существование). У нее число положительных координат l $(l \leqslant k < m)$ будет меньше m и соответствующие столбцы матрицы A по предложению 1 линейно независимы. Тогда вновь по предложению 1 точка $\hat{x} = (\hat{y}, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^n$ будет крайней точкой множества $D(P_k)$, причем число положительных координат l у нее меньше m. Это противоречит невырожденности задачи. Значит, наше допущение, что существует допустимая точка, у которой имеется менее m положительных координат, неверно. То есть $k \geqslant m$.

b) *Необходимость* непосредственно следует из определения невырожденной задачи (в невырожденной задаче любая крайняя точка имеет ровно m положительных координат).

Достаточность. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) \in D_{P_k}$, $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, m$ — допустимая точка в задаче (P_k). Докажем, что тогда x — крайняя точка. Доказательство будем вести от противного. Предположим противное, что точка x не является крайней. Тогда по предложению 1 столбцы $a^1, \ldots, a^m$ матрицы A линейно зависимы. Это означает, что существует ненулевой набор множителей $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ такой, что $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a^i = 0$. Значит $A\lambda = 0$ для вектора $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^n$. Поэтому $A(x + t\lambda) = Ax + tA\lambda = Ax = b\ \forall\, t$, а вектор $x + t\lambda \geqslant 0$ при малых t как больше, так и меньше нуля, т. е. $x + t\lambda \in D_{P_k}$. Поскольку $x_i + t\lambda_i > 0$ при $t = 0$, то увеличивая $|t|$, придем к случаю, когда еще одна координата вектора $x + t\lambda$ обратится а ноль, а все остальные по-прежнему больше или равняются нулю. Таким образом, при некотором t допустимая точка $x + t\lambda$ будет иметь менее m положительных координат. Это противоречит пункту a) данного предложения. Получили противоречие. Значит, наше предположение, что точка x не является крайней — неверно. То есть x является крайней точкой. ■

3.3. Доказательство симплекс-метода

Рассмотрим невырожденную задачу линейного программирования в канонической форме

$$\langle c, x\rangle \to \max; \quad Ax = b, \quad x \geqslant 0. \qquad (P_k)$$

Напомним, что двойственной к ней является следующая задача:

$$\langle b, y\rangle \to \min; \quad A^*y \geqslant c. \qquad (P_k^{**})$$

При изложении правила решения задачи в канонической форме мы пользовались фактами, которые были даны там без обоснования. Сейчас мы их докажем, оформив утверждение в виде теоремы.

Теорема. *Пусть $x = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^n$, $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, m$ — крайняя точка множества допустимых элементов $D(P_k)$. Тогда:*

a) *если $\Delta \geqslant 0$, то вектор x — решение задачи (P_k), а вектор $y := c_b A_b^{-1}$ — решение двойственной задачи (P_k^{**});*

b) *если для некоторого j $\Delta_j < 0$ и $x^j \leqslant 0$, то значение задачи $S_{P_k} = +\infty$;*

c) *если не выполнены условия пп.* a) *и* b), *то точка x' является новой крайней точкой множества допустимых элементов $D(P_k)$, значение функционала при этом возрастет на величину $-t_{i_0}\Delta_{j_0}$, а разложение векторов $x', a^1, \ldots, a^n$ производится согласно симплекс-методу.*

Доказательство. Напомним, что по предложению 1 $\det A_b \neq 0$, т. е. матрица A_b обратима.

a) Пусть $\Delta \geqslant 0$. Преобразуем это условие с учетом определения векторов $z := c_b X$, $y := c_b A_b^{-1} \Leftrightarrow yA_b = c_b$ и матрицы X $(A_b X = A)$:

$$\Delta \geqslant 0 \Leftrightarrow z - c \geqslant 0 \Leftrightarrow z \geqslant c \Leftrightarrow c_b X \geqslant c \Leftrightarrow yA_b X \geqslant c \Leftrightarrow yA \geqslant c \Leftrightarrow A^* y \geqslant c.$$

Значит, y является допустимым вектором в задаче (P_k^{**}) двойственной к задаче (P_k). Кроме того в силу условия $A_b x_b = b$

$$\langle c, x\rangle = \langle c_b, x_b\rangle = \langle yA_b, x_b\rangle = \langle A_b^* y, x_b\rangle = \langle y, A_b x_b\rangle = \langle y, b\rangle.$$

По критерию решения п. 3.1 x — решение в задаче (P_k), а y — решение в двойственной задаче (P_k^{**}).

b) Положим $x(t) := x - t(x^j, 0) + te_j$ $(e_1, \dots, e_n$ — канонический базис в $\mathbf{R}^n)$. Тогда $x(t) = (x_b - tx^j, 0) + te_j \geqslant 0$ $\forall\, t \geqslant 0$ в силу условия $x^j \leqslant 0$ и $Ax(t) = Ax - tA_b x^j + tAe_j = b - ta^j + ta^j = b$. Значит, $x(t)$ — допустимый элемент для любого $t \geqslant 0$, при этом

$$\begin{aligned}\langle c, x(t)\rangle = \langle c, x - t(x^j, 0) + te_j\rangle &= \langle c, x\rangle - t\langle c_b, x^j\rangle + t\langle c, e_j\rangle = \\ &= \langle c, x\rangle - tz_j + tc_j = \langle c, x\rangle - t(z_j - c_j) = \\ &= \langle c, x\rangle - t\Delta_j \to +\infty \quad \text{при } t \to +\infty.\end{aligned}$$

c) Предположим, что не выполнены условия пп. a) и b) теоремы. Тогда для некоторого j_0 такого, что $m + 1 \leqslant j_0 \leqslant n$, выполнено условие $\Delta_{j_0} < 0$ и величина

$$t_{i_0} := \min_i \left\{ \frac{x_i}{x_{ij_0}} \;\middle|\; x_{ij_0} > 0 \right\} = \frac{x_{i_0}}{x_{i_0 j_0}} > 0.$$

Возьмем $x' := x - t_{i_0}(x^{j_0}, 0) + t_{i_0} e_{j_0}$. Докажем, что вектор x' является новой крайней точкой в задаче (P_k). Покажем вначале, что он является допустимым вектором. Как и в пункте b) выводим, что $Ax' = b$. Имеем

$$x'_i = x_i - t_{i_0} x_{ij_0} = x_i - \frac{x_{i_0}}{x_{i_0 j_0}} x_{ij_0} \geqslant 0 \quad \text{при } i = 1, \dots, m;$$

$$x'_i = 0 \quad \text{при } i = m+1, \dots, n, \quad i \neq j_0;$$

$$x'_{i_0} = t_{i_0} = \frac{x_{i_0}}{x_{i_0 j_0}} > 0.$$

Таким образом, $x' \geqslant 0$, и значит, вектор x' является допустимым в невырожденной задаче (P_k). По построению у вектора x' по сравнению с вектором x добавилась одна положительная j_0-я координата, а какие-то обратились в ноль. Поскольку по предложению 2a) у допустимой точки число положительных координат не менее m, то в ноль может

обратиться только одна координата (это x'_{i_0}-я координата обратилась в ноль). Значит, у вектора x' имеется ровно m положительных координат на местах $1, \dots, i_0 - 1, i_0 + 1, \dots, m, j_0$. Следовательно, по предложению 2b) x' — крайняя точка. (Отметим, что в невырожденной задаче число положительных компонент у крайней точки может уменьшаться.)

Выписанные формулы означают, что в новой симплексной таблице столбец x' вычисляется согласно указанному методу построения симплексной таблицы. Покажем, что и остальные столбцы x'^j в новой симплексной таблице строятся по этому же способу. Для этого вычислим координаты x'_{ij} разложения столбцов a^j, $j = 1, \dots, n$, матрицы A по базису $a^1, \dots, a^{i_0 - 1}, a^{j_0}, a^{i_0 + 1}, \dots, a^m$.

В старом базисе мы имели следующие разложения:

$$a^j = \sum_{i=1}^m a^i x_{ij} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^m a^i x_{ij} + a^{i_0} x_{i_0 j}, \quad j = 1, \dots, n. \tag{1}$$

В частности при $j = j_0$ $\quad a^{j_0} = \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^m a^i x_{ij_0} + a^{i_0} x_{i_0 j_0}$.

Поскольку $x_{i_0 j_0} \neq 0$, то выразим a^{i_0} из последнего уравнения

$$a^{i_0} = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^m a^i \frac{x_{ij_0}}{x_{i_0 j_0}} + \frac{a^{j_0}}{x_{i_0 j_0}},$$

и подставим в соотношение (1). Получим разложения по базису $a^1, \dots, a^{i_0 - 1}, a^{j_0}, a^{i_0 + 1}, \dots, a^m$:

$$\begin{aligned}a^j &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^m a^i x_{ij} + \left(-\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^m a^i \frac{x_{ij_0}}{x_{i_0 j_0}} + \frac{a^{j_0}}{x_{i_0 j_0}} \right) x_{i_0 j} = \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^m a^i \left(x_{ij} - \frac{x_{i_0 j} x_{ij_0}}{x_{i_0 j_0}} \right) + a^{j_0} \frac{x_{i_0 j}}{x_{i_0 j_0}}, \quad j = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{i_0 j} x_{ij_0}}{x_{i_0 j_0}}, \quad i \neq i_0, \quad i = 1, \dots, m, \quad \Rightarrow x'_{ij_0} = 0, \quad i \neq i_0,$$

$$x'_{i_0 j} = \frac{x_{i_0 j}}{x_{i_0 j_0}}, \quad j = 1, \dots, n.$$

■

§ 4. Методы нахождения начальной крайней точки

4.1. Переход к решению двойственной задачи

Рассмотрим метод решения задач линейного программирования путем перехода к двойственной задаче и решения полученной двойственной задачи. При этом строка Δ последней симплекс-таблицы даст нам решение исходной задачи.

Пусть нам дана следующая задача линейного программирования:

$$\langle b, y\rangle \to \min; \quad A^* y \geqslant c, \quad y \geqslant 0. \qquad (P)$$

Двойственной для нее является задача в нормальной форме

$$\langle c, x\rangle \to \max; \quad Ax \leqslant b, \quad x \geqslant 0. \qquad (P^{**})$$

Сведем эту задачу к эквивалентной задаче в канонической форме путем добавления неотрицательных (искусственных) переменных $\tilde{x} = (x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$ и единичной матрицы I:

$$\langle c, x\rangle \to \max; \quad Ax + I\tilde{x} = b, \quad x \geqslant 0, \quad \tilde{x} \geqslant 0 \iff$$
$$\langle \bar{c}, \bar{x}\rangle \to \max; \quad \overline{A}\bar{x} = b, \quad \bar{x} \geqslant 0 \quad (\bar{c} = (c, 0), \quad \bar{x} = (x, \tilde{x}), \quad \overline{A} = AI). \quad (\overline{P})$$

Задачу $(\overline{P})$ с вектором $b \geqslant 0$ можно решить симплекс-методом, взяв в качестве исходной крайней точки точку $(0, \ldots, 0, b_1, \ldots, b_m) \in \mathbf{R}^{n+m}$. Эта точка будет крайней по Предложению 1 п. 3.2, поскольку столбцы единичной матрицы I, соответствующие положительным координатам этой точки, линейно независимы.

Пусть вектор $\bar{x} = (x, \tilde{x})$ является решением задачи $(\overline{P})$ $(\bar{x} \in \operatorname{Arg}\overline{P})$. Тогда соответственно x является решением задачи (P^{**}) $(x \in \operatorname{Arg} P^{**})$. А по теореме п. 3.3 вектор $y := c_b A_b^{-1}$ является решением задачи, двойственной к задаче в канонической форме $\overline{P}$:

$$\langle b, y\rangle \to \min; \quad \overline{A}^* y \geqslant \bar{c} \quad \left(\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A^* \\ I \end{pmatrix} y \geqslant \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^* y \geqslant c, \ y \geqslant 0\right).$$

То есть y является решением исходной задачи (P). При этом $S_{\overline{P}} = S_P$, а из разложения $A_b \overline{X} = \overline{A} \Leftrightarrow \overline{X} = A_b^{-1}\overline{A} \Leftrightarrow X = A_b^{-1}A$. $\widetilde{X} = A_b^{-1} I = A_b^{-1}$ получим, что вектор

$$y = c_b A_b^{-1} = c_b \widetilde{X} = \tilde{z} = \tilde{z} - \tilde{c} = \widetilde{\Delta}.$$

Таким образом, часть строки Δ последней симплекс-таблицы, лежащей под разложениями векторов искусственных переменных, дает нам решение исходной задачи (P).

Пример. Решить задачу линейного программирования путем перехода к двойственной задаче. Пусть необходимо решить следующую задачу:

$$4y_1 + 2y_2 \to \min; \quad y_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2,$$

$$\begin{aligned} 9y_1 + y_2 &\geqslant 15, \\ 3y_1 + 4y_2 &\geqslant 27, \\ y_1 + 5y_2 &\geqslant 20. \end{aligned} \qquad (P)$$

Решение. Двойственной для данной задачи линейного программирования будет следующая задача в нормальной форме (выведите это самостоятельно):

$$15x_1 + 27x_2 + 20x_3 \to \max; \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\begin{aligned} 9x_1 + 3x_2 + x_3 &\leqslant 4, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 &\leqslant 2. \end{aligned} \qquad (P^{**})$$

Сведем эту задачу к задаче в канонической форме путем добавления неотрицательных (искусственных) переменных x_4, и x_5 и заменяя неравенства равенствами:

$$15x_1 + 27x_2 + 20x_3 \to \max; \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, 5,$$

$$\begin{aligned} 9x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \quad &= 4, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 \quad + x_5 &= 2. \end{aligned} \qquad (\overline{P})$$

В выписанной задаче линейного программирования в канонической форме в качестве первоначальной крайней точки возьмем точку $x = (0, 0, 0, 4, 2)$. Эта точка будет крайней по Предложению 1 п. 3.2, поскольку столбцы единичной матрицы, соответствующие положительным координатам этой точки, линейно независимы. Тогда базисными векторами будут векторы $a^4 = (1, 0)$, $a^5 = (0, 1)$.

Составим первую симплексную таблицу для задачи в канонической форме $(\overline{P})$:

	c		15	27	20	0	0	t
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	
a^4	0	4	9	3	1	1	0	$\frac{4}{3}$
a^5	0	2	1	4	5	0	1	$\frac{1}{2}$
z		0	0	0	0	0	0	
Δ			-15	-27	-20	0	0	

В первой симплексной таблице разрешающий столбец a^2, разрешающая строка a^5, разрешающий элемент симплексной таблицы 4. Заменяем в базисе вектор искусственных переменных a^5 на вектор a^2 и для нового базиса строим вторую симплексную таблицу:

	c		15	27	20	0	0	t
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	
a^4	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{33}{4}$	0	$-\frac{11}{4}$	1	$-\frac{3}{4}$	$\frac{10}{33}$
a^2	27	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	2
z		$\frac{27}{2}$	$\frac{27}{4}$	27	$\frac{135}{4}$	0	$\frac{27}{4}$	
Δ			$-\frac{33}{4}$	0	$\frac{55}{4}$	0	$\frac{27}{4}$	

Во второй симплексной таблице разрешающий столбец a^1, разрешающая строка a^4, разрешающий элемент симплексной таблицы $\frac{33}{4}$. Заменяем в базисе вектор искусственных переменных a^4 на вектор a^1 и для нового базиса строим третью симплексную таблицу:

	c		15	27	20	0	0	t
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	
a^1	15	$\frac{10}{33}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{33}$	$-\frac{1}{11}$	
a^2	27	$\frac{14}{33}$	0	1	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{33}$	$\frac{3}{11}$	
z		16	15	27	31	1	6	
Δ			0	0	11	1	6	

Вектор $\Delta \geqslant 0$, поэтому точка $\hat{\bar{x}} = \left(\frac{10}{33}, \frac{14}{33}, 0, 0, 0\right)$ является решением двойственной задачи с добавленными искусственными переменными $(\overline{P})$, а вектор $\hat{x} = \left(\frac{10}{33}, \frac{14}{33}, 0\right)$ является решением задачи (P^{**}) и $S_{\overline{P}} = S_{P^{**}} = 16$.

В последней симплекс-таблице под разложениями векторов искусственных переменных стоят числа 1, 6, являющиеся значениями решения исходной задачи (P), т. е. вектор $\hat{y} = (1, 6)$ является решением задачи (P) и $S_P = 16$.

4.2. Метод искусственного базиса

Метод добавления искусственных переменных используется для отыскания начальной крайней точки в задаче линейного программирования в канонической форме

$$\langle c, x\rangle \to \max; \quad Ax = b, \quad x \geqslant 0. \qquad (P_k)$$

Не ограничивая общности, можем считать, что все координаты вектора b неотрицательны. Если это не так, например, $b_j < 0$, то умножим обе части j-го уравнения на -1. Поэтому далее считаем, что $b \geqslant 0$.

Рассмотрим вспомогательную задачу, добавляя искусственные переменные $\bar{x} = (x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$ и единичную матрицу I,

$$-\sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \to \max; \quad Ax + I\bar{x} = b, \quad x \geqslant 0, \quad \bar{x} \geqslant 0. \qquad (\overline{P})$$

Поскольку значение задачи $S_{\overline{P}} \leqslant 0$ и множество допустимых элементов $D(\overline{P}) \neq \varnothing$ $\quad(\bar{x}\colon = (0, \ldots, 0, b_1, \ldots, b_m) \in D(\overline{P}))$, то значение задачи конечно ($|S_{\overline{P}}| < +\infty$). По теореме существования п. 3.1 решение в задаче $(\overline{P})$ существует. Причем, если в исходной задаче (P_k) множество допустимых элементов непусто ($D(P_k) \neq \varnothing$), то значение задачи $S_{\overline{P}} = 0$, а решением задачи $(\overline{P})$ будет крайняя точка, у которой все искусственные переменные равны нулю. Задачу $(\overline{P})$ можно решить симплекс-методом, взяв в качестве исходной крайней точки точку $\bar{x}$. Эта точка будет крайней по Предложению 1 п. 3.2, поскольку столбцы единичной матрицы I, соответствующие базисным координатам точки $\bar{x}$, линейно независимы.

При решении задачи $(\overline{P})$ симплекс-методом могут возникнуть три исхода:

1) *Не все искусственные переменные равны нулю.* Это означает, что исходная задача (P_k) не имеет допустимых элементов.

Действительно, если не все искусственные переменные равны нулю, то $S_{\overline{P}} < 0$. Предположим, что исходная задача (P_k) имеет допустимые элементы, например, x^0. Но тогда $S_{\overline{P}} < 0 = \langle(0, -1), (x^0, 0)\rangle$ — противоречие. Значит, наше предположение, что исходная задача (P_k) имеет допустимые элементы, неверно.

2) *Все искусственные переменные равны нулю и среди базисных векторов нет векторов, соответствующих искусственным переменным.* Это означает, что решением в задаче $(\overline{P})$ будет $\hat{\bar{x}} = (\hat{x}, 0)$ — крайняя точка множества $D(\overline{P})$. Точка $\hat{x}$ будет крайней точкой множества $D(P_k)$ по Предложению 1, поскольку столбцы матрицы A, соответствующие базисным координатам, линейно независимы.

Далее, взяв в качестве первоначальной крайней точки точку $\hat{x}$, можем приступать ко второму этапу — решению задачи (P_k) по симплекс-методу с найденной крайней точкой. Таким образом, мы имеем двуэтапный метод решения задачи (P_k).

3) *Все искусственные переменные равны нулю и среди базисных векторов есть вектора, соответствующие искусственным переменным.* В этом случае надо исключить из числа базисных вектора, соответствующие искусственным переменным.

Пусть, например, в последней таблице имеется строка с искусственной переменной x_{n+i_0}. Будем считать эту строку разрешающей. В качестве разрешающего столбца возьмем столбец a^{j_0}, $j_0 \leqslant n$, такой, что $x_{n+i_0 j_0} \neq 0$. Столбец b новой симплексной таблицы при этом не изменится (по правилу прямоугольника $x_i' = x_i - \dfrac{x_{n+i_0} x_{i\,j_0}}{x_{n+i_0 j_0}} = x_i$, так как $x_{n+i_0} = 0$), только вместо переменной x_{n+i_0} будет стоять переменная x_{j_0}. Значение функционала $\langle c, x\rangle$ также не изменится. Этот процесс закончится удалением всех базисных векторов, соответствующих искусственным переменным, с заменой их на неискусственные, или окажется, что $x_{n+i_0 j} = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Так как x_{ij} — i-я координата разложения вектора a^j по базисному вектору a^i, то тогда все векторы a^j, $j = 1, \ldots, n$, включая вектор b, можно разложить по базисным без вектора a^{n+i_0}. Значит, i_0-я строка исходной системы уравнений является линейно зависимой от остальных строк и на втором этапе можем просто вычеркнуть из симплексной таблицы i_0-ю строку, содержащую эту искусственную переменную, и начать второй этап с меньшим числом базисных векторов.

Таким образом, двуэтапный симплекс-метод позволяет для любой задачи линейного программирования в канонической форме: 1) обнаружить, что исходная задача не имеет допустимых элементов, или 2) найти первоначальную крайнюю точку в задаче (P) и решить задачу по симплекс-методу, или 3) исключить линейно зависимые равенства и решить задачу по симплекс-методу с найденной крайней точкой, имеющей менее m положительных элементов.

Замечание. Вместо такого двуэтапного решения задачи (P_k) можно решать следующую задачу (ее принято называть М-задачей)

$$\big\langle \bar{c}, (x, \tilde{x}) \big\rangle \to \max; \quad Ax + I\tilde{x} = b, \quad x \geqslant 0, \quad \tilde{x} \geqslant 0,$$

где $\bar{c} = (c, -M, \ldots, -M) \in \mathbb{R}^{n+m}$, M — положительное число. Нетрудно показать, что при любом достаточно большом M первые n координат полученного решения определяют решение в (P_k), а искусственные переменные равны нулю.

4.3. Примеры

Пример 1. Решить методом искусственного базиса задачу:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \to \max; \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1,2,3,4,$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 10, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 20, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 15. \end{aligned}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу, добавляя искусственные переменные x_5, x_6:

$$-x_5 - x_6 \to \max; \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, 6,$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 10, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_5 &= 20, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_6 &= 15. \end{aligned}$$

Исходная крайняя точка $x = (0, 0, 0, 10, 20, 15)$. Базисные векторы $a^4 = (1, 0, 0)$, $a^5 = (0, 1, 0)$, $a^6 = (0, 0, 1)$.

Составим первую симплексную таблицу для вспомогательной задачи:

	c		0	0	0	0	−1	−1	t
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	
a^4	0	10	1	2	1	1	0	0	10
a^5	−1	20	2	1	**5**	0	1	0	4
a^6	−1	15	1	2	3	0	0	1	5
z		−35	−3	−3	−8	0	−1	−1	
Δ			−3	−3	−8	0	0	0	

Из таблицы видно, что разрешающим столбцом является столбец a^3, разрешающая строка a^5. Заменяем в базисе вектор a^5 на вектор a^3 и для нового базиса строим вторую симплексную таблицу:

	c		0	0	0	0	−1	−1	t
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	
a^4	0	6	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{5}$	0	1	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{10}{3}$
a^3	0	4	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	0	20
a^6	−1	3	$-\frac{1}{5}$	$\mathbf{\frac{7}{5}}$	0	0	$-\frac{3}{5}$	1	$\frac{15}{7}$
z		−3	$\frac{1}{5}$	$-\frac{7}{5}$	0	0	$\frac{3}{5}$	−1	
Δ			$\frac{1}{5}$	$-\frac{7}{5}$	0	0	$\frac{8}{5}$	0	

Из таблицы видно, что разрешающим столбцом является столбец a^2, разрешающая строка a^6. Заменяем в базисе вектор a^6 на вектор a^2 и для нового базиса строим третью симплексную таблицу:

	c		0	0	0	0	-1	-1	t
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	
a^4	0	$\frac{15}{7}$	$\frac{6}{7}$	0	0	1	$\frac{4}{7}$	$-\frac{9}{7}$	
a^3	0	$\frac{25}{7}$	$\frac{3}{7}$	0	1	0	$\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{7}$	
a^2	0	$\frac{15}{7}$	$-\frac{1}{7}$	1	0	0	$-\frac{3}{7}$	$\frac{5}{7}$	
z		0	0	0	0	0	0	0	
Δ			0	0	0	0	1	1	

Вектор $\Delta \geqslant 0$, поэтому точка $\hat{x} = \left(0, \frac{15}{7}, \frac{25}{7}, \frac{15}{7}, 0, 0\right)$ является решением вспомогательной задачи и $S_{\max} = 0$.

Перейдем к решению основной задачи. Составим первую симплексную таблицу для начальной крайней точки $x = \left(0, \frac{15}{7}, \frac{25}{7}, \frac{15}{7}\right)$. Разложения векторов x, a^1 по базису a^4, a^3, a^2 берем из последней симплексной таблицы:

	c		1	2	3	-1	t
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	a^4	
a^4	-1	$\frac{15}{7}$	$\frac{6}{7}$	0	0	1	$\frac{5}{2}$
a^3	3	$\frac{25}{7}$	$\frac{3}{7}$	0	1	0	$\frac{25}{3}$
a^2	2	$\frac{15}{7}$	$-\frac{1}{7}$	1	0	0	
z		$\frac{90}{7}$	$\frac{1}{7}$	2	3	-1	
Δ			$-\frac{6}{7}$	0	0	0	

Разрешающим столбцом является столбец a^1, разрешающая строка a^4. Заменяем в базисе вектор a^4 на вектор a^1 и для нового базиса строим вторую симплексную таблицу:

	c		1	2	3	-1	t
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	a^4	
a^1	1	$\frac{5}{2}$	1	0	0	$\frac{7}{6}$	
a^3	3	$\frac{5}{2}$	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	
a^2	2	$\frac{5}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{6}$	
z		15	1	2	3	0	
Δ			0	0	0	1	

Вектор $\Delta \geqslant 0$, поэтому точка $\hat{x} = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0\right)$ является решением исходной задачи и $S_{\max} = 15$.

Пример 2. Решить методом искусственного базиса задачу:

$$x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max; \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 5, \\ 2x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} &= 3, \\ -2x_1 + 2x_2 \phantom{{}+x_3} &= 4. \end{aligned}$$

Решение. Рассмотрим вспомогательную задачу, добавляя искусственные переменные x_4, x_5:

$$-x_4 - x_5 \to \max; \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, 5,$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4+x_5} &= 5, \\ 2x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} + x_4 \phantom{{}+x_5} &= 3, \\ -2x_1 + 2x_2 \phantom{{}+x_3+x_4} + x_5 &= 4. \end{aligned}$$

Исходная крайняя точка $\bar{x} = (0, 0, 5, 3, 4)$. Базисные векторы $a^3 = (1, 0, 0)$, $a^4 = (0, 1, 0)$, $a^5 = (0, 0, 1)$.

Составим первую симплексную таблицу для вспомогательной задачи:

	c		0	0	0	-1	-1	t
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	
a^3	0	5	1	1	1	0	0	5
a^4	-1	3	2	1	0	1	0	3
a^5	-1	4	-2	**2**	0	0	1	2
z		-7	0	-3	0	-1	-1	
Δ			0	-3	0	0	0	

Разрешающий столбец a^2, разрешающая строка a^5. Заменяем в базисе вектор a^5 на вектор a^2 и для нового базиса строим вторую симплексную таблицу:

	c		0	0	0	−1	−1	t
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	
a^3	0	3	2	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
a^4	−1	1	**3**	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
a^2	0	2	−1	1	0	0	$\frac{1}{2}$	
z		−1	−3	0	0	−1	$\frac{1}{2}$	
Δ			−3	0	0	0	$\frac{3}{2}$	

Во второй симплексной таблице разрешающий столбец a^1, разрешающая строка a^4. Заменяем в базисе вектор искусственных переменных a^4 на вектор a^1 и для нового базиса строим третью симплексную таблицу:

	c		0	0	0	−1	−1	t
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	
a^3	0	$\frac{7}{3}$	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$	
a^1	0	$\frac{1}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	
a^2	0	$\frac{7}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
z		0	0	0	0	0	0	
Δ			0	0	0	1	1	

Вектор $\Delta \geqslant 0$, поэтому точка $\hat{\hat{x}} = \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{7}{3}, 0, 0\right)$ является решением вспомогательной задачи с добавленными искусственными переменными, и $S_{\max} = 0$.

Перейдем к решению основной задачи. Составим первую симплексную таблицу для начальной крайней точки $x = \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)$. Разложения вектора x по базису a^3, a^1, a^2 берем из последней симплексной таблицы:

	c		1	−2	1	t
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	
a^3	1	$\frac{7}{3}$	0	0	1	
a^1	1	$\frac{1}{3}$	1	0	0	
a^2	−2	$\frac{7}{3}$	0	1	0	
z		−2	1	−2	1	
Δ			0	0	0	

Вектор $\Delta \geqslant 0$, поэтому точка $\hat{x} = \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)$ является решением исходной задачи и $S_{\max} = -2$.

Заметим, что на самом деле исходная задача тривиально решается, так как мы имеем систему из трех линейных уравнений с тремя неизвестными. И эта система имеет единственное решение $x = \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

Пример 3. Решить, вводя искусственные переменные задачу:

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 \to \max; \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1,2,3,4,$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &\leqslant 30, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &\leqslant 40, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &\leqslant 25. \end{aligned}$$

Добавив неотрицательные переменные x_5, x_6, x_7, получим задачу в канонической форме:

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 \to \max; \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, 7,$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \qquad\qquad &= 30, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \qquad + x_6 \qquad &= 40, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \qquad\qquad + x_7 &= 25. \end{aligned}$$

Исходная крайняя точка $x = (0,0,0,0,30,40,25)$. Базисные векторы $a^5 = (1,0,0)$, $a^6 = (0,1,0)$, $a^7 = (0,0,1)$.

Составим первую симплексную таблицу:

	c		2	1	3	5	0	0	0	t
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	
a^5	0	30	2	3	1	**2**	1	0	0	15
a^6	0	40	4	2	1	2	0	1	0	20
a^7	0	25	1	2	3	1	0	0	1	25
z		0	0	0	0	0	0	0	0	
Δ			-2	-1	-3	-5	0	0	0	

В первой симплексной таблице разрешающим столбцом является столбец a^4, Разрешающая строка a^5, $t = 15$. Заменяем в базисе вектор a^5 на вектор a^4 и для нового базиса строим вторую симплексную таблицу:

	c		2	1	3	5	0	0	0	t
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	
a^4	5	15	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	30
a^6	0	10	2	-1	0	0	-1	1	0	
a^7	0	10	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	4
z		75	5	$\frac{15}{2}$	$\frac{5}{2}$	5	$\frac{5}{2}$	0	0	
Δ			3	$\frac{13}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	0	0	

Во второй симплексной таблице разрешающий столбец a^3, разрешающая строка a^7, $t = 4$. Заменяем в базисе вектор a^7 на вектор a^3 и для нового базиса строим третью симплексную таблицу для базиса a^4, a^6, a^3:

	c		2	1	3	5	0	0	0	t
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	
a^4	5	13	1	$\frac{7}{5}$	0	1	$\frac{3}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	
a^6	0	10	2	-1	0	0	-1	1	0	
a^3	3	4	0	$\frac{1}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	
z		77	5	$\frac{38}{5}$	3	5	$\frac{12}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	
Δ			3	$\frac{33}{5}$	0	0	$\frac{12}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	

Вектор $\Delta \geqslant 0$, поэтому крайняя точка $\hat{x} = (0, 0, 4, 13, 0, 10, 0)$ является решением расширенной задачи, а решением исходной задачи является точка $\hat{x} = (0, 0, 4, 13)$, $S_{\max} = 77$.

4.4. Задачи

Задачи линейного программирования в канонической форме с незаданной первоначальной крайней точкой. Решить методом искусственного базиса.

4.1.
$$\begin{aligned} &x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max; \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1,2,3,\\ &x_1 - x_2 + x_3 = 3,\\ &2x_1 - 5x_2 - x_3 = 0. \end{aligned}$$

4.2.
$$\begin{aligned} &x_1 - 10x_2 + x_3 \to \max; \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1,2,3,\\ &x_1 - 5,5x_2 - 7x_3 = -13,\\ &x_1 - 14,5x_2 + 7x_3 = 15. \end{aligned}$$

4.3.
$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \to \max; \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1,2,3,4,\\ &x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2,\\ &x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 = 24. \end{aligned}$$

4.4.
$$\begin{aligned} &x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 \to \max; \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1,2,3,4,\\ &x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 3,\\ &2x_1 + x_3 - x_4 = 4. \end{aligned}$$

4.5.
$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max; \quad x_i \geqslant 0, \quad = 1,2,3,4,\\ &4x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 5,\\ &5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 5,\\ &3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 4. \end{aligned}$$

4.6.
$$\begin{aligned} &x_1 + 10x_2 - x_3 + 5x_4 \to \max; \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1,2,3,4,\\ &x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1,\\ &-x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2,\\ &x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 5. \end{aligned}$$

4.7.
$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 \to \max; \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1,\dots,5,\\ &x_2 + x_3 - 2x_4 + 7x_5 = 2,\\ &6x_1 + x_3 - 2x_4 + 7x_5 = 2,\\ &x_1 + x_2 - 2x_4 + 7x_5 = 2. \end{aligned}$$

4.8.
$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 \to \max; \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1,\dots,5,\\ &3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 10,\\ &6x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 20,\\ &10x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 - 7x_5 = 30. \end{aligned}$$

4.9.
$$\begin{aligned} &x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \to \max; \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1,\dots,6,\\ &14x_1 - 14x_2 + 12x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 3x_6 = 8,\\ &x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 0,\\ &16x_1 - 16x_2 + 8x_3 + 7x_4 + 4x_5 + 5x_6 = 12. \end{aligned}$$

§ 5. Транспортная задача

Важный частный случай задач линейного программирования — транспортные задачи. Это математические модели разнообразных прикладных задач по оптимизации перевозок. В этом параграфе мы приведем постановку транспортной задачи, методы отыскания исходной крайней точки, решение задачи методом потенциалов, двойственную к транспортной задаче, обоснование метода потенциалов, задачу о назначении, примеры.

5.1. Постановка задачи

Транспортной задачей по критерию стоимости называется следующая задача о минимизации стоимости перевозок.

Пусть в пунктах отправления $A_1, \ldots, A_m$ сосредоточено соответственно $a_1, \ldots, a_m$ единиц некоторого однородного груза. Этот груз следует перевезти в n пунктов назначения $B_1, \ldots, B_n$, причем в каждый из них надлежит завезти соответственно $b_1, \ldots, b_n$ единиц груза. Стоимость перевозки единицы груза из пункта A_i в пункт B_j равна c_{ij}.

Обозначая через x_{ij} количество единиц груза, предназначенного к отправке из пункта A_i в пункт B_j, получим задачу нахождения плана перевозок, при котором общая стоимость окажется минимальной:

$$\langle c, x\rangle := \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min;$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{P}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{a}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{b}$$

В матричном виде ограничения задачи (a)–(b) имеют вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \ldots \\ x_{1n} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ \ldots \\ x_{2n} \\ \ldots \\ x_{m1} \\ x_{m2} \\ \ldots \\ x_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

План перевозок и стоимость перевозок представляются в виде векторов $x = (x_{ij},\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$, $c = (c_{ij},\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$ соответственно, или матриц $X = \{x_{ij}\}_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$, $C = \{c_{ij}\}_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$.

Уравнения (a) означают, что из пункта отправления A_i весь груз вывезен в пункты назначения (потребления). Уравнения (b) означают, что количество груза, завезенного в пункт B_j со всех пунктов отправления, соответствует требуемому.

Естественно считать, что общий запас груза на всех пунктах отправления равен суммарной потребности всех пунктов назначения, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = M.$$

В этом случае говорят, что имеется *замкнутая модель* транспортной задачи.

Если суммарные запасы отправителей больше суммарной потребности пунктов назначения, т. е. $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то равенства (a) заменяются неравенствами

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

а условие (b) остается без изменений. В этом случае вводится фиктивный пункт назначения B_{n+1} с требуемой величиной завоза $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ и нулевыми стоимостями перевозок в этот пункт. Добавляя новые неотрицательные переменные $x_{i\,n+1}$, $i = 1, \ldots, m$, приходим к замкнутой модели транспортной задачи с ограничениями в виде равенств (a)–(b).

Если суммарные запасы отправителей меньше суммарных запросов пунктов назначения, т. е. $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то равенства (b) заменяются неравенствами

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leqslant b_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

а условие (a) остается без изменений. В этом случае вводится фиктивный пункт отправления A_{m+1} с требуемой величиной вывоза $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ и нулевыми стоимостями перевозок из этого пункта. Добавляя новые неотрицательные переменные $x_{m+1\,j}$, $j = 1, \ldots, n$, приходим к замкнутой модели транспортной задачи с ограничениями в виде равенств (a)–(b).

5.2. Особенности задачи

Транспортная задача является задачей линейного программирования и может быть решена симплекс-методом, который значительно упрощается в виду простого строения системы ограничений (a)–(b).

Этот упрощенный метод мы и опишем ниже. Предварительно докажем некоторые утверждения, имеющие место для транспортных задач.

Лемма 1. *Для любой транспортной задачи существует допустимый план перевозок* ($D_P \neq \varnothing$).

Доказательство. Положим $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{M}$, тогда уравнения (a) будут выполняться:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{M} = \frac{a_i}{M} \sum_{j=1}^{n} b_j = \frac{a_i}{M} M = a_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Аналогично показывается выполнение уравнений (b). Значит x_{ij} — допустимый план перевозок. ■

Отметим, что поскольку значение задачи ограничено снизу нулем и допустимый план перевозок имеется по лемме 1, то в задаче (P) по теореме существования решения п. 3.1 ($|S_P| < +\infty \Rightarrow \operatorname{Arg} P \neq \varnothing$) оптимальный план существует.

Лемма 2. *Ранг системы ограничений* (a)–(b) *равен* $m + n - 1$.

Доказательство. Если сложить первые m строк матрицы ограничений A и вычесть из них последние n строк, то получим нулевую строку. Следовательно, ранг матрицы A меньше $m + n$.

С другой стороны, располагая $m - 1$ строку матрицы A (начиная со второй), под n последними строками, получим треугольную матрицу из $m+n-1$ строк, ранг которой равен количеству уравнений $(m+n-1)$.

Таким образом, ранг матрицы A равен $m + n - 1$. ■

По предложению 1 п. 3.2 (столбцы матрицы ограничений, соответствующие положительным координатам крайней точки, линейно независимы) и лемме 2 (количество линейно-независимых столбцов не превышает $m + n - 1$) крайняя точка в задаче может иметь не более $m + n - 1$ положительных координат.

Лемма 3. *Любые* $m + n - 1$ *строк матрицы* A *линейно независимы.*

Доказательство. Любая строка матрицы A (для определенности возьмем строку из системы уравнений (a)) равна сумме всех строк системы уравнений (b) минус сумма всех строк уравнений (a) без этой строки, то есть является линейной комбинацией оставшихся $m + n - 1$ строк. А так как ранг матрицы A равен $m + n - 1$, то оставшиеся строки линейно независимы. ■

Отметим, что не любые $m + n - 1$ столбцов матрицы A являются линейно независимыми (приведите пример!).

5.3. Методы нахождения начальной крайней точки

Рассмотрим замкнутую модель транспортной задачи.

1. *Метод «северо-западного угла».* Назначим максимально возможную перевозку из пункта отправления A_1 в пункт назначения B_1. То есть заполняем верхний левый элемент матрицы X первоначальной крайней точки. При этом либо пункт отправления A_1, либо пункт назначения B_1, либо оба эти пункта окажутся полностью обслуженными.

Если пункт отправления A_1 оказался полностью обслуженным, то в дальнейшем при нахождении первоначального плана перевозок выводим из рассмотрения первую строку матрицы X и рассматриваем только оставшуюся часть матрицы. Если пункт назначения B_1 оказался полностью обслуженным, то аналогично выводим первый столбец из дальнейшего рассмотрения. Если же и пункт отправления, и пункт назначения оказались полностью обслуженными (так может случиться только в вырожденной задаче), то вывести из рассмотрения следует или первый столбец, или первую строку матрицы X. Условимся для определенности выводить из рассмотрения первый столбец матрицы. В этом случае в число базисных элементов на следующем этапе введем элемент с нулевым значением перевозки, стоящий в северо-западном углу оставшейся части матрицы X, т. е. в базис войдет второй элемент в строке, считая вычеркиваемый элемент первым.

Эту процедуру продолжаем до тех пор, пока все пункты отправления и пункты назначения не будут обслужены. Последней перевозкой будет перевозка из пункта отправления A_m в пункт назначения B_n.

На каждом шаге обслуживается один из пунктов отправления или назначения, а на последнем шаге обслуживаются и последний пункт отправления и последний пункт назначения. Поэтому число базисных элементов будет ровно $m + n - 1$. Найденный план будет допустимым планом перевозок, содержащим не более $m + n - 1$ положительных координат и являющийся (как будет показано ниже) крайней точкой множества допустимых элементов.

Отметим, что данный метод нахождения первоначальной крайней точки не учитывает стоимости перевозок. Поэтому начальный план может оказаться далеко не оптимальным. Приведем другие методы нахождения начальной точки, учитывающие стоимости перевозок.

2. *Минимум по матрице.* Выберем в платежной матрице C минимальный элемент. Пусть $\min\limits_{i,j} c_{ij} = c_{i_0 j_0}$. Назначим максимально возможную перевозку из пункта отправления A_{i_0} в пункт назначения B_{j_0}. Если минимальная стоимость перевозки достигается на нескольких элементах, то выбираем любой из них. Тем самым пункт отправления A_{i_0} или пункт назначения B_{j_0} (или оба пункта одновременно) будет обслужен. А в платежной матрице соответствующая строка или столбец выводятся из дальнейшего рассмотрения. Если и пункт отправления, и пункт назначения одновременно обслужились, то для определенности как и в п. 1 будем выводить из рассмотрения столбец матрицы X.

В оставшейся части платежной матрицы вновь ищется минимальный элемент и процедура повторяется до тех пор, пока первоначальный план перевозок не будет получен.

Найденный план будет допустимым планом перевозок, содержащим не более $m+n-1$ положительных координат с числом базисных элементов $m+n-1$ и являющийся крайней точкой множества допустимых элементов.

3. *Минимум по строке.* Выберем в первой строке платежной матрицы C минимальный по величине элемент. Предположим $\min\limits_{j} c_{1j} = c_{1j_0}$. Назначим максимально возможную перевозку из пункта отправления A_1 в пункт назначения B_{j_0}. Если минимум достигается на нескольких элементах, то выбираем любой из них. Тем самым пункт отправления A_1 или назначения B_{j_0} (или оба пункта одновременно) будет обслужен. А в платежной матрице первая строка или соответствующий столбец выводятся из дальнейшего рассмотрения.

В первой строке оставшейся части матрицы вновь ищется минимальный элемент и процедура повторяется до тех пор пока первоначальный план перевозок не будет получен (первой строкой может оказаться вновь первая строка исходной матрицы без какого-то элемента или вторая строка исходной матрицы без какого-то элемента).

В итоге получаем крайнюю точку множества допустимых элементов задачи.

4. *Минимум по столбцу.* Выберем в первом столбце платежной матрицы C минимальный элемент. Предположим $\min\limits_{i} c_{i1} = c_{i_0 1}$. Назначим максимально возможную перевозку из пункта отправления A_{i_0} в пункт назначения B_1. Если минимум достигается на нескольких элементах, то выбираем любой из них. Тем самым пункт отправления A_{i_0} или пункт назначения B_1 будет обслужен. А в платежной матрице соответствующая строка или первый столбец выводятся из дальнейшего рассмотрения.

В первом столбце оставшейся части платежной матрицы вновь ищется минимальный элемент и процедура повторяется до тех пор пока первоначальный план перевозок не будет получен (первым столбцом

может оказаться вновь первый столбец исходной матрицы без какого-то элемента или второй столбец исходной матрицы без какого-то элемента).

В итоге получаем первоначальную крайнюю точку.

Лемма 4. *Описанные выше методы нахождения первоначального плана перевозок, приводят к первоначальной крайней точке множества допустимых элементов.*

Доказательство. По предложению 1 достаточно доказать, что соответствующие базисным элементам столбцы матрицы A линейно независимы.

Отметим, что описанные методы нахождения первоначального плана перевозок содержат общий элемент действия: на каждом этапе мы выводим из рассмотрения либо столбец, либо строку матрицы X.

Доказательство можно провести индукцией по числу $m+n=k$. Пусть $m+n=2$ — минимально возможное число. Матрица A состоит из единственного элемента и утверждение очевидно. Предположим, что для $m+n=k$ получаемые этим методом столбцы линейно независимы. Докажем соответствующее утверждение для $m+n=k+1$. Не ограничивая общности, считаем, что на первом этапе выводится из рассмотрения первая строка или первый столбец (в противном случае мы можем строки или столбцы переобозначить и поменять местами).

Если мы выводим из рассмотрения первую строку матрицы, то это означает, что первый пункт отправления A_1 обслужен полностью, x_{11} — базисный элемент, а все элементы $x_{1j}=0$, $j=2,\dots,n$. Первое ограничение уравнений (a) выполнено, в матрице ограничений A можно убрать первую строку и первые n столбцов. Получилась меньшая матрица размера $(m-1+n)\times(m-1)n$, а для нее по предположению индукции соответствующие столбцы являются линейно независимыми. Добавление столбца с единицей на первом месте (и еще на одном из последних n мест) к $m+n-2$ столбцам, расширенным и начинающимся с нуля образует систему $m+n-1$ линейно независимых столбцов.

Если мы выводим из рассмотрения первый столбец матрицы, то это означает, что первый пункт назначения обслужен полностью, x_{11} — базисный элемент, а все элементы $x_{i1}=0$, $i=2,\dots,m$. Первое ограничение уравнений (b) выполнено, в матрице ограничений A можно убрать $m+1$-ю строку и соответствующие m столбцов. Получилась подобная меньшая матрица размера $(m+n-1)\times(n-1)m$, а для нее по предположению индукции соответствующие столбцы являются линейно независимыми. Добавление столбца с единицей на $m+1$-м месте (и еще на одном из первых m мест) к $m+n-2$ линейно независимым столбцам, расширенным и имеющим на $m+1$-м месте нули образует систему из $m+n-1$ линейно независимых столбцов. Индукция закончена. ■

5.4. Метод потенциалов

Сформулируем правило решения транспортной задачи методом потенциалов (обоснование этого метода будет дано в п. 5.7).

1. *Привести задачу к замкнутой модели* (см. п. 5.1).

2. *Найти первоначальный план перевозок x, являющийся крайней точкой множества допустимых элементов.*

3. *Исследование плана перевозок x.* Для найденного плана x построить матрицу $\overline{C} = \{\bar{c}_{ij}\}_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$, $\bar{c}_{ij} := u_i + v_j$, определяя $m+n$ потенциалов u_i, v_j из системы $m+n-1$ уравнений:

$$u_i + v_j = c_{ij} \quad \text{для базисных индексов } i,j.$$

Эти уравнения линейно независимы (это следует из линейной независимости столбцов, соответствующих базисным элементам), поэтому для однозначного определения потенциалов u_i, v_j положим заранее один из потенциалов заданной величине, например, положим $u_1 = 0$.

Замечание. Элементы $\bar{c}_{ij}$ матрицы $\overline{C}$ не зависят от первоначального выбора u_1.

Действительно. Предположим, что вместо первоначального потенциала u_1 мы бы взяли потенциал $\tilde{u}_1 = u_1 + t$. Тогда $\tilde{v}_1 = v_1 - t$ и все $\tilde{u}_i = u_i + t$, $\tilde{v}_j = v_j - t$ при базисных i,j, поскольку $u_i + v_j = c_{ij}$ при базисных i,j. Таким образом, сумма $\tilde{u}_i + \tilde{v}_j = u_i + t + v_j - t = u_i + v_j = \bar{c}_{ij}$ не зависит от выбора первоначального потенциала u_1.

4. *Провести исследование матрицы* $\Delta := C - \overline{C}$.

Если $\Delta \geqslant 0$, то исследуемый план x является решением задачи (P), а потенциалы u_i, v_j являются решением двойственной задачи.

Если среди элементов матрицы Δ есть отрицательные, то выберем наименьший элемент. Пусть, например, $\Delta_{i_0 j_0} = \min\limits_{i,j} \Delta_{ij} < 0$.

5. *Построить новый план перевозок, являющийся крайней точкой множества допустимых элементов.*

Положим $x'_{i_0 j_0} = t$, $x'_{ij} = x_{ij} \pm t$ для базисных индексов i,j, где t — некоторая положительная величина (не изменяя остальные небазисные компоненты x_{ij} равные нулю) так, чтобы x'_{ij} по-прежнему были неотрицательны, но одна из базисных компонент обратилась бы в ноль. Вектор матрицы A, соответствующий этой компоненте, выводим из числа базисных, а вектор матрицы A, соответствующий переменной $x_{i_0 j_0}$, вводим в число базисных векторов. Далее вновь начинаем исследование полученной крайней точки x', т. е. возвращаемся к п. 3.

В невырожденной задаче в ноль может обратиться только одна из компонент вектора x. В вырожденной задаче в ноль может обратиться несколько компонент. В этом случае из числа базисных векторов исключается любой вектор с нулевым значением, как правило исключается вектор с наибольшей стоимостью перевозок.

5.5. Примеры транспортных задач

Пример 1.

$$2x_{11} + 2x_{12} + 4x_{13} + 8x_{14} + 4x_{21} + 5x_{22} + 7x_{23} + 6x_{24} + 6x_{31} + 3x_{32} + 4x_{33} + 9x_{34} \to \min;$$

$$\begin{aligned} &x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 14, \qquad && x_{11} + x_{21} + x_{31} \leqslant 22,\\ &x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 18, && x_{12} + x_{22} + x_{32} \leqslant 2,\\ &x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 16, && x_{13} + x_{23} + x_{33} \leqslant 17,\\ & && x_{14} + x_{24} + x_{34} \leqslant 11, \end{aligned}$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1,2,3, \quad j = 1,2,3,4.$$

Решение. Поскольку суммарные запасы груза на всех пунктах отправления меньше суммарных запросов пунктов назначения, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{3} a_i = 48 < \sum\limits_{j=1}^{4} b_j = 52$, то надо привести задачу к замкнутой модели. Введем фиктивный пункт отправления A_4 с требуемой величиной вывоза $a_4 = \sum\limits_{j=1}^{4} b_j - \sum\limits_{i=1}^{3} a_i = 4$ и нулевыми стоимостями перевозок из этого пункта. Зададим транспортную задачу в виде платежной матрицы:

	$b_1 = 22$	$b_2 = 2$	$b_3 = 17$	$b_4 = 11$
$a_1 = 14$	2	2	4	8
$a_2 = 18$	4	5	7	6
$a_2 = 16$	6	3	4	9
$a_4 = 4$	0	0	0	0

Построим по методу «Северо-западного угла» первоначальное распределение:

	$b_1 = 22$	$b_2 = 2$	$b_3 = 17$	$b_4 = 11$
$a_1 = 14$	14			
$a_2 = 18$	8	2	8	
$a_2 = 16$			9	7
$a_4 = 4$				4

Для краткости в матрице плана перевозок не пишем нулевые значения небазисных перевозок. Значение функционала равно 225. Число ненулевых элементов в первоначальном плане перевозок $m+n-1 = 4+4-1 = 7$.

Это позволяет сразу перейти к исследованию на оптимальность найденного плана. Построим матрицу $\overline{C}$*:

	$v_1 = 2$	$v_2 = 3$	$v_3 = 5$	$v_4 = 10$
$u_1 = 0$	**2**	3	5	10
$u_2 = 2$	**4**	5	7	12
$u_3 = -1$	1	2	**4**	**9**
$u_4 = -10$	−8	−7	−5	**0**

В матрице $\Delta = C - \overline{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ минимальный элемент $\Delta_{24} = \min\limits_{i,j} \Delta_{ij} = -6 < 0$. Добавляя в первоначальный план распределения на место нулевого небазисного элемента x_{24} величину t, получим второй план возможных перевозок

14			
8	2	$8-t$	t
		$9+t$	$7-t$
			4

→

14			
8	2	1	7
		16	
			4

Величина $t = 7$. Значение функционала = 183. Построим матрицу $\overline{C}$:

	$v_1 = 2$	$v_2 = 3$	$v_3 = 5$	$v_4 = 4$
$u_1 = 0$	**2**	3	5	4
$u_2 = 2$	**4**	5	7	**6**
$u_3 = -1$	1	2	**4**	3
$u_4 = -4$	−2	−1	1	**0**

В матрице $\Delta = C - \overline{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ минимальные элементы $\Delta_{12} = \Delta_{13} = \Delta_{43} = \min\limits_{i,j} \Delta_{ij} = -1 < 0$. Во множество базисных элементов включим элемент x_{43} с наименьшей стоимостью перевозок. Добавляя в первоначальный план распределения на место нулевого небазисного элемента x_{43} величину t, получим третий план возможных перевозок:

* В матрице $\overline{C}$ базисные элементы будем выделять полужирным шрифтом.

14			
8	2	$1-t$	$7+t$
		16	
		t	$4-t$

→

14			
8	2		8
		16	
		1	3

Величина $t = 1$. Значение функционала = 182. Построим матрицу $\overline{C}$:

	$v_1 = 2$	$v_2 = 3$	$v_3 = 4$	$v_4 = 4$
$u_1 = 0$	**2**	3	4	4
$u_2 = 2$	**4**	5	6	**6**
$u_3 = 0$	2	3	**4**	4
$u_4 = -4$	−2	−1	**0**	**0**

В матрице $\Delta = C - \overline{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ минимальный элемент $\Delta_{12} = \min\limits_{i,j} \Delta_{ij} = -1 < 0$. Добавляя в первоначальный план распределения на место нулевого небазисного элемента x_{12} величину t, получим четвертый план возможных перевозок

$14-t$	t		
$8+t$	$2-t$		8
		16	
		1	3

→

12	2		
10			8
		16	
		1	3

Величина $t = 2$. Значение функционала = 180. Построим матрицу $\overline{C}$:

	$v_1 = 2$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 4$
$u_1 = 0$	**2**	**2**	4	4
$u_2 = 2$	**4**	4	6	**6**
$u_3 = 0$	2	2	**4**	4
$u_4 = -4$	−2	−2	**0**	**0**

Поскольку $\Delta = C - \overline{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \geqslant 0$, то найденный четвертый план перевозок является оптимальным и суммарная стоимость 180.

Пример 2.

$x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 4x_{14} + 4x_{21} + 3x_{22} + 2x_{23} + 2x_{32} + 2x_{33} + x_{34} \to \min;$

$$\begin{aligned} &x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 3, \qquad && x_{11} + x_{21} + x_{31} = 2,\\ &x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 4, && x_{12} + x_{22} + x_{32} = 3,\\ &x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 5, && x_{13} + x_{23} + x_{33} = 4,\\ & && x_{14} + x_{24} + x_{34} = 3, \end{aligned}$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1,2,3, \quad j = 1,2,3,4.$$

Решение. Поскольку суммарные запасы отправителей равны суммарным запросам потребителей, т.е. $\sum\limits_{i=1}^{3} a_i = \sum\limits_{j=1}^{4} b_j = 12$, то данная задача является замкнутой моделью транспортной задачи.

Зададим задачу виде платежной матрицы:

	$b_1 = 2$	$b_2 = 3$	$b_3 = 4$	$b_4 = 3$
$a_1 = 3$	1	2	3	4
$a_2 = 4$	4	3	2	0
$a_3 = 5$	0	2	2	1

Построим по методу «Северо-западного угла» первоначальное распределение:

	$b_1 = 2$	$b_2 = 3$	$b_3 = 4$	$b_4 = 3$
$a_1 = 3$	2	1		
$a_2 = 4$		2	2	
$a_3 = 5$			2	3

Для краткости в матрице плана перевозок не пишем нулевые значения небазисных перевозок. Значение функционала равно 21. Число ненулевых элементов в первоначальном плане перевозок $m+n-1 = 3+4-1 = 6$. Это позволяет сразу перейти к исследованию на оптимальность найденного плана. Построим матрицу $\overline{C}$:

	$v_1 = 1$	$v_2 = 2$	$v_3 = 1$	$v_4 = 0$
$u_1 = 0$	**1**	**2**	1	**0**
$u_2 = 1$	2	**3**	**2**	1
$u_3 = 1$	2	3	**2**	**1**

В матрице $\Delta = C - \overline{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ минимальный элемент $\Delta_{31} = \min\limits_{i,j} \Delta_{ij} = -2 < 0$. Добавляя в первоначальный план распределения

на место нулевого небазисного элемента x_{31} величину t, получим второй план возможных перевозок

$2-t$	$1+t$		
	$2-t$	$2+t$	
t		$2-t$	3

$\rightarrow$

0	3		
		4	
2		0	3

Величина $t = 2$. Из трех обнулившихся базисных элементов в базисе оставили два элемента с наименьшими стоимостями перевозок. Значение функционала равно 17. Построим матрицу $\overline{C}$:

	$v_1 = 1$	$v_2 = 2$	$v_3 = 3$	$v_4 = 2$
$u_1 = 0$	**1**	**2**	3	2
$u_2 = -1$	0	1	**2**	1
$u_3 = -1$	**0**	1	**2**	**1**

В матрице $\Delta = C - \overline{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ минимальный элемент $\Delta_{24} = \min\limits_{i,j} \Delta_{ij} = -1 < 0$. Добавляя в первоначальный план распределения на место нулевого небазисного элемента x_{24} величину t, получим третий план возможных перевозок

0	3		
		$4-t$	t
2		$0+t$	$3-t$

$\rightarrow$

0	3		
		1	3
2		3	

Величина $t = 3$. Значение функционала $= 14$. Построим матрицу $\overline{C}$:

	$v_1 = 1$	$v_2 = 2$	$v_3 = 3$	$v_4 = 1$
$u_1 = 0$	**1**	**2**	3	1
$u_2 = -1$	0	1	**2**	**0**
$u_3 = -1$	**0**	1	**2**	0

В матрице $\Delta = C - \overline{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ все элементы неотрицательны. Значит найденный третий план перевозок является оптимальным и суммарная стоимость всех перевозок равняется 14.

Пример 3.

$$5x_{11} + 4x_{12} + 13x_{13} + 9x_{14} + 2x_{21} + 7x_{22} + 6x_{23} + 8x_{24} + \\ +9x_{31}+7x_{32}+11x_{33}+7x_{34}+x_{41}+6x_{42}+x_{43}+x_{44} \to \min;$$

$$\begin{aligned} &x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=19, && x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=\ 9,\\ &x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=\ 7, && x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=17,\\ &x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=11, && x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=15,\\ &x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=15, && x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=11, \end{aligned}$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i,j = 1,2,3,4.$$

Решение. Представим задачу замкнутого типа в стандартной форме:

	$b_1 = 9$	$b_2 = 17$	$b_3 = 15$	$b_4 = 11$
$a_1 = 19$	5	4	13	9
$a_2 = 7$	2	7	6	8
$a_2 = 11$	9	7	11	7
$a_4 = 15$	1	6	1	1

Построим по методу «Северо-западного угла» первоначальный план:

	$b_1 = 9$	$b_2 = 17$	$b_3 = 15$	$b_4 = 11$
$a_1 = 19$	9	10		
$a_2 = 7$		7	0	
$a_2 = 11$			11	
$a_4 = 15$			4	11

Для краткости в матрице плана перевозок не пишем нулевые значения небазисных перевозок. Значение функционала равно 270. Число элементов в базисе $m + n - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$. Один базисный элемент оказался нулевым. Это означает, что задача является вырожденной. Перейдем к исследованию на оптимальность найденного плана. Построим матрицу $\overline{C}$:

	$v_1 = 5$	$v_2 = 4$	$v_3 = 3$	$v_4 = 3$
$u_1 = 0$	**5**	**4**	3	3
$u_2 = 3$	8	**7**	**6**	6
$u_3 = 8$	13	12	**11**	11
$u_4 = -2$	3	2	**1**	**1**

В матрице $\Delta = C - \overline{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 & 6 \\ -6 & 0 & 0 & 2 \\ -4 & -5 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ минимальный элемент $\Delta_{21} = \min \Delta_{ij} = -6 < 0$. Добавляя в первоначальный план распределе-

ния на место нулевого небазисного элемента x_{21} величину t, получим Второй план возможных перевозок

9−t	10+t		
t	7−t	0	
		11	
		4	11

$\to$

2	17		
7		0	
		11	
		4	11

Величина $t = 7$. Значение функционала $= 228$. Построим матрицу $\overline{C}$:

	$v_1 = 5$	$v_2 = 4$	$v_3 = 9$	$v_4 = 9$
$u_1 = 0$	**5**	**4**	9	9
$u_2 = -3$	**2**	1	**6**	6
$u_3 = 2$	7	6	**11**	11
$u_4 = -8$	−3	−4	**1**	**1**

В матрице $\Delta = C - \overline{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -4 \\ 4 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ минимальный элемент $\Delta_{34} = \min \Delta_{ij} = -4 < 0$. Третий план перевозок

2	17		
7		0	
		11−t	t
		4+t	11−t

$\to$

2	17		
7		0	
			11
		15	0

Величина $t = 11$. В этом случае обнуляются сразу два базисных элемента. Оставим из них в базисе элемент x_{44} с наименьшей стоимостью перевозок. Значение функционала равно 184. Построим матрицу $\overline{C}$:

	$v_1 = 5$	$v_2 = 4$	$v_3 = 9$	$v_4 = 9$
$u_1 = 0$	**5**	**4**	9	9
$u_2 = -3$	**2**	1	**6**	6
$u_3 = -2$	3	2	7	**7**
$u_4 = -8$	−3	−4	**1**	**1**

Матрица $\Delta = C - \overline{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & 0 \\ 4 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix} \geqslant 0$. Значит третий план перевозок является оптимальным и стоимость всех перевозок равна 184.

5.6. Задача двойственная к транспортной задаче

Рассмотрим транспортную задачу:

$$\langle c, x\rangle := \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min;$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad = 1,\ldots,m, \; j = 1,\ldots,n, \tag{P}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \; i = 1,\ldots,m, \tag{a}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \; j = 1,\ldots,n, \tag{b}$$

замкнутого типа $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = M\right)$. Двойственной к ней будет (см п. 2.5) задача

$$\langle a, u\rangle + \langle b, v\rangle: = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \to \max;$$

$$u_i + v_j \leqslant c_{ij}, \quad i = 1,\ldots,m, \quad j = 1,\ldots,n, \tag{P**}$$

в которой двойственными переменными являются потенциалы $u = (u_1,\ldots,u_m)$, $v = (v_1,\ldots,v_n)$.

В матричном виде ограничения задачи (P^{**}) имеют вид:

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\
1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\\
0 & 1 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\
0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0\\
0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 1 & \ldots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_m\\ v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_n \end{pmatrix}
\leqslant
\begin{pmatrix} c_{11}\\ c_{12}\\ \vdots\\ c_{1n}\\ c_{21}\\ c_{22}\\ \vdots\\ c_{2n}\\ \vdots\\ \vdots\\ c_{m1}\\ c_{m2}\\ \vdots\\ c_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрица ограничений является транспонированной по отношению к матрице ограничений исходной транспортной задачи (P).

5.7. Обоснование метода потенциалов решения транспортной задачи

Теорема. *Крайняя точка x является решением в невырожденной транспортной задаче (P) тогда и только тогда, когда вектор $\Delta \geqslant 0$.*

Доказательство. *Достаточность.* Пусть $\Delta \geqslant 0$. Это означает, что для точки x найдены потенциалы u_i, v_j такие, что $\Delta_{ij} := c_{ij} - \bar{c}_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) \geqslant 0$, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$, причем $u_i + v_j = c_{ij}$ для базисных i, j (множество базисных индексов обозначим B). Следовательно, $u_i + v_j \leqslant c_{ij}$, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$. Таким образом, условие $\Delta \geqslant 0$ равносильно тому, что вектор (u, v) является допустимым в двойственной задаче (P^{**}).

С другой стороны, поскольку $x_{ij} = 0$ при $(i,j) \notin B$, то

$$\langle c, x\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = \sum_{i,j\in B} c_{ij}x_{ij} = \sum_{i,j\in B}(u_i + v_j)x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(u_i + v_j)x_{ij}.$$

Разбивая последнюю сумму на две и учитывая условия (a) и (b), продолжим последнее равенство

$$\langle c, x\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} u_i x_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_j x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} u_i a_i + \sum_{j=1}^{n} v_j b_j = \langle a, u\rangle + \langle b, v\rangle.$$

Отсюда по критерию решения п. 3.1 x — решение в прямой задаче (P), а (u, v) — решение в двойственной задаче (P^{**}).

Необходимость. Пусть x — оптимальный план. Докажем, что тогда $\Delta \geqslant 0$. Проведем доказательство от противного. Допустим, что это условие не выполняется, т. е. существует $\Delta_{i_0 j_0} < 0$. Поскольку $\Delta_{ij} = 0$ для $(i,j) \in B$, то $(i_0, j_0) \notin B$. Возьмем достаточно малое $t > 0$ так, чтобы $x + \bar{t} \geqslant 0$, где вектор $\bar{t} = \{t_{ij}\}$ выбирается по методу потенциалов,

$$t_{ij} = \begin{cases} \pm t \text{ или } 0, & i, j \in B,\\ t, & i = i_0,\; j = j_0,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Условия (a)–(b) допустимости вектора $x + \bar{t}$ в задаче (P) равносильны условиям:

$$\sum_{i=1}^{m} t_{ij} = 0, \quad j = 1,\ldots,n; \qquad \sum_{j=1}^{n} t_{ij} = 0, \quad i = 1,\ldots,m. \tag{*}$$

Поскольку $c_{ij} = \Delta_{ij} + \bar{c}_{ij} = \Delta_{ij} + (u_i + v_j)$, то

$$\langle c, x + \bar{t}\rangle - \langle c, x\rangle = \langle c, \bar{t}\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\Delta_{ij} + (u_i + v_j))t_{ij} =$$
$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\Delta_{ij}t_{ij} + \sum_{i=1}^{m}u_i\sum_{j=1}^{n}t_{ij} + \sum_{j=1}^{n}v_j\sum_{i=1}^{m}t_{ij} = \Delta_{i_0j_0}t_{i_0j_0}.$$

Последние два слагаемых в этой сумме равняются нулю в силу соотношения (*). Слагаемые $\Delta_{ij}t_{ij} = 0$ при $(i,j) \neq (i_0, j_0)$, так как в этом произведении один из сомножителей равен нулю: $\Delta_{ij} = 0$ при $(i,j) \in B$, $t_{ij} = 0$ при $(i,j) \notin B$, $(i,j) \neq (i_0, j_0)$. Таким образом,

$$\langle c, x + \bar{t}\rangle - \langle c, x\rangle = \Delta_{i_0j_0}t_{i_0j_0} < 0,$$

значит, x не является оптимальным планом. Получили противоречие. Следовательно, наше допущение, что существует $\Delta_{i_0j_0} < 0$ неверно и, если x — оптимальный план, то обязательно $\Delta \geqslant 0$. ∎

5.8. Задача о назначении. Пример

Пусть некоторая фирма нанимает m служащих на n вакантных мест. Известно, что при назначении i-го служащего на j-е место фирма получит c_{ij} прибыли. На какие должности кого надо назначить, чтобы общая прибыль фирмы после назначений была наибольшей?

Таким образом, задача о назначении является частным случаем транспортной задачи о максимуме функционала, когда $a_i = b_j = 1$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$:

$$\langle c, x\rangle := \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \max; \quad x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n,$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \ldots, n; \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Задачи о назначении также решаются методом потенциалов, предварительно перейдя от задачи на максимум к задаче на минимум

$$-\langle c, x\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} -c_{ij}x_{ij} \to \min.$$

Поэтому, если в платежной матрице задачи о назначении стоимости были c_{ij}, то при решении методом потенциалов берутся стоимости $-c_{ij}$.

Пример.

$$5x_{11} + 4x_{12} + 7x_{13} + 6x_{21} + 7x_{22} + 3x_{23} + 8x_{31} + 11x_{32} + 2x_{33} \to \max;$$

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 1, & x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 1,\\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 1, & x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 1,\\ x_{31} + x_{32} + x_{33} &= 1, & x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 1, \end{aligned}$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i,j = 1,2,3.$$

Решение. Задачу о назначении можно задать в виде платежной матрицы, не указывая величины a_i, b_j, поскольку они равны 1:

5	4	7
6	7	3
8	11	2

Перейдем от задачи на максимум к задаче на минимум, при этом в платежной матрице стоимости поменяют свой знак:

−5	−4	−7
−6	−7	−3
−8	−11	−2

Построим по методу «Северо-западного угла» первоначальное распределение. Два нулевых элемента будем считать базисными, чтобы число элементов в базисе было $m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$. Выберем их так, чтобы они имели минимальные стоимости.

1		
	1	
0	0	1

Значение функционала равно −14. Построим матрицу $\overline{C}$:

	$v_1 = -5$	$v_2 = -8$	$v_3 = 1$
$u_1 = 0$	−5	−8	1
$u_2 = 1$	−4	−7	2
$u_3 = -3$	−8	−11	−2

В матрице $\Delta = C - \overline{C} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ -2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ минимальный элемент $\Delta_{13} = \min\limits_{i,j} \Delta_{ij} = -8 < 0$. Добавляя в начальный план распределения на место нулевого небазисного элемента x_{13} величину t, получим второй план

1−t		t	→	0		1
	1				1	
0+t	0	1−t		1	0	

Величина $t = 1$. Из двух обнулившихся базисных элементов в базисе оставили элемент с наименьшей стоимостью. Значение функционала равно −22. Построим матрицу $\overline{C}$:

	$v_1 = -5$	$v_2 = -8$	$v_3 = -7$
$u_1 = 0$	**−5**	−8	−7
$u_2 = 1$	−4	**−7**	−6
$u_3 = -3$	**−8**	**−11**	−10

В матрице $\Delta = C - \overline{C} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ минимальный элемент $\Delta_{21} = \min\limits_{i,j} \Delta_{ij} = -2 < 0$. Добавляя во второй план распределения на место нулевого небазисного элемента x_{21} величину t, получим третий план распределения должностей

0		1	→	0		1
t	1−t			1		
1−t	0+t			0	1	

Величина $t = 1$. Из двух обнулившихся базисных элементов в базисе оставили элемент с наименьшей стоимостью. Значение функционала равно −24. Построим матрицу $\overline{C}$:

	$v_1 = -5$	$v_2 = -8$	$v_3 = -7$
$u_1 = 0$	**−5**	−8	**−7**
$u_2 = -1$	**−6**	−9	−8
$u_3 = -3$	**−8**	**−11**	−10

В матрице $\Delta = C - \overline{C} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ все элементы неотрицательны.

Значит найденное распределение является оптимальным и значение исходной задачи равняется 24.

5.9. Задачи

5.1. $2x_{11} + 3x_{12} + 4x_{13} + x_{14} + 3x_{21} + 4x_{22} + 2x_{23} + 5x_{24} + x_{31} + 7x_{32} + 5x_{33} + 7x_{34} + 5x_{41} + 2x_{42} + 8x_{43} + 2x_{44} \to \min$;

$$\begin{aligned} &x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 7, && x_{11} + x_{21} + x_{31} = 11, \\ &x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 8, && x_{12} + x_{22} + x_{32} = 2, \\ &x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 5, && x_{13} + x_{23} + x_{33} = 6, \\ &x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 6, && x_{14} + x_{24} + x_{34} = 7, \end{aligned}$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

5.2. $x_{11} + 3x_{12} + 10x_{13} + 6x_{14} + 7x_{21} + 2x_{22} + 5x_{23} + 8x_{24} + 5x_{31} + 2x_{32} + 2x_{33} + 9x_{34} + 2x_{41} + x_{42} + 3x_{43} + 4x_{44} \to \min$;

$$\begin{aligned} &x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 6, && x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 14, \\ &x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 18, && x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 11, \\ &x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 14, && x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 8, \\ &x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 10, && x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 15, \end{aligned}$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

5.3. $4x_{11} + 3x_{12} + 3x_{13} + 6x_{21} + 4x_{22} + 5x_{23} + 5x_{31} + 4x_{32} + 6x_{33} + 6x_{41} + 9x_{42} + 10x_{43} \to \min$;

$$\begin{aligned} &x_{11} + x_{12} + x_{13} \leqslant 8, && x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 5, \\ &x_{21} + x_{22} + x_{23} \leqslant 17, && x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 15, \\ &x_{31} + x_{32} + x_{33} \leqslant 7, && x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 10, \\ &x_{41} + x_{42} + x_{43} \leqslant 4, \end{aligned}$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i, = 1, 2, 3, 4, \quad j = 1, 2, 3.$$

5.4. $2x_{11} + 6x_{12} + 2x_{13} + x_{14} + 2x_{15} + 9x_{21} + 4x_{22} + 3x_{23} + 4x_{24} + 3x_{25} + 5x_{31} + 2x_{32} + 8x_{33} + 2x_{34} + 5x_{35} \to \min$;

$$\begin{aligned} & && x_{11} + x_{21} + x_{31} = 15, \\ &x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 13, && x_{12} + x_{22} + x_{32} = 7, \\ &x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 11, && x_{13} + x_{23} + x_{33} = 14, \\ &x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 27, && x_{14} + x_{24} + x_{34} = 9, \\ & && x_{15} + x_{25} + x_{35} = 6, \end{aligned}$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Ответы к задачам главы 2

1.1. $(1,3,0) \in \text{Arg}$; $S_{\max} = 4$.

1.2. $(0,3,0,2), (2,1,0,0) \in \text{Arg}\ P$; $S_{\max} = 5$.

1.3. $(0,4,0,0) \in \text{Arg}$; $S_{\max} = 4$.

1.4. $(2,0,3,0) \in \text{Arg}$; $S_{\max} = 5$.

1.5. $(5,3,0,0) \in \text{Arg}$; $S_{\max} = 8$.

1.6. $(1,1,1,0) \in \text{Arg}$; $S_{\max} = 3$.

1.7. $(5,0,3,4,0) \in \text{Arg}$; $S_{\max} = 15$.

1.8. $(1,2,3,0,0,0) \in \text{Arg}$; $S_{\max} = 2$.

1.9. $(5,0,4,1,0,1,0) \in \text{Arg}$; $S_{\max} = 10$.

4.1. $(5,2,0) \in \text{Extr}$, $(5,2,0) \in \text{Arg}$; $S_{\max} = 13$.

4.2. $(1,0,2) \in \text{Extr}$; $S_{\max} = +\infty$, $\left\langle (1,-10,1), \left(1+10t, t, 2+\frac{9}{14}t\right)\right\rangle = 3 + \frac{9}{14}t \to +\infty$ при $t \to +\infty$.

4.3. $\left(0, \frac{11}{6}, 0, \frac{1}{6}\right) \in \text{Extr}$, $(4,0,2,0) \in \text{Arg}$; $S_{\max} = 10$.

4.4. $\left(\frac{9}{5}, 0, \frac{2}{5}, 0\right) \in \text{Extr}$, $\left(\frac{7}{3}, 0, 0, \frac{2}{3}\right) \in \text{Arg}$; $S_{\max} = 3$.

4.5. $(0,1,1,2) \in \text{Extr}$, $(1,2,0,3) \in \text{Arg}$; $S_{\max} = 6$.

4.6. $D = \emptyset \Rightarrow S_{\max} = -\infty$.

4.7. $\left(\underline{0}, 0, \underline{0}, 0, \underline{\frac{2}{7}}\right) \in \text{Extr}$; $S_{\max} = +\infty$,
$\left\langle (1,2,3,4,5), \left(0,0,0,t, \frac{2}{7} + \frac{2}{7}t\right)\right\rangle = \frac{10+38t}{7} \to +\infty$ при $t \to +\infty$.

4.8. $(\underline{0}, \underline{0}, \underline{10}, 0, 0), (\underline{10}, \underline{0}, 0, 0, \underline{10}) \in \text{Arg}$; $S_{\max} = -10$.

4.9. $(\underline{0}, 0, 0, \underline{1}, 0, \underline{1}) \in \text{Extr}$, $(0,0,0,\underline{1}, \underline{0}, \underline{1}) \in \text{Arg}$; $S_{\max} = 2$.

5.1. $x_{11} = 4$, $x_{14} = 3$, $x_{21} = 2$, $x_{23} = 6$, $x_{31} = 5$, $x_{42} = 2$, $x_{44} = 4$; $S_{\min} = 46$.

5.2. $x_{11} = 6$, $x_{22} = 11$, $x_{24} = 7$, $x_{31} = 6$, $x_{33} = 8$, $x_{41} = 2$, $x_{44} = 8$; $S_{\min} = 166$.

5.3. $x_{13} = 8$, $x_{22} = 15$, $x_{23} = 2$, $x_{31} = 5$; $S_{\min} = 114$.

5.4. $x_{11} = 10$, $x_{13} = 3$, $x_{23} = 11$, $x_{31} = 5$, $x_{32} = 7$, $x_{34} = 9$, $x_{35} = 6$; $S_{\min} = 146$.

Глава 3

Вариационное исчисление

Началу появления вариационного исчисления дала толчок работа И. Бернулли 1696 года «Новая задача, к решению которой приглашаются математики», в которой поставлена задача о брахистохроне. В вертикальной плоскости даны две точки A и B. Определить путь AMB, спускаясь по которому под действием собственной тяжести тело M, начав двигаться из точки A, дойдет до точки B за кратчайшее время. Вводя в плоскости систему координат так, чтобы ось t была горизонтальна, а ось x вертикальна, и пользуясь законом Галилея о скорости тела, падающего вниз под действием силы тяжести, нетрудно выписать формализованную постановку задачи:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2(t)}}{\sqrt{x(t)}}\,dt \to \min; \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1.$$

Здесь и далее точка над функцией ($\dot{x}^2(t)$) означает производную этой функции по t.

Эта задача была решена самим И. Бернулли, а также Я. Бернулли, Лейбницем, Лопиталем и Ньютоном. Решение Лейбница было основано на аппроксимации кривых ломаными. Развитая затем в работах Эйлера, эта идея заложила основы прямых методов в вариационном исчислении. Выписанная выше задача об экстремуме интегрального функционала при заданных условиях на концах, является простейшей задачей вариационного исчисления, к рассмотрению которых мы сейчас и перейдем.

В третьей главе приводятся также и другие элементарные задачи вариационного исчисления: задача Больца, изопериметрическая задача. Все они являются частными случаями более общей задачи Лагранжа. Как частные случаи задачи Лагранжа рассматриваются задача с подвижными концами и задача со старшими производными.

§ 1. Простейшая задача классического вариационного исчисления

1.1. Постановка задачи

Простейшей задачей классического вариационного исчисления называется следующая экстремальная задача в пространстве $C^1([t_0, t_1], \mathbb{R})$:

$$I(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \to \text{extr}; \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1. \qquad (P)$$

Здесь $L = L(t, x, \dot{x})$ — функция трех переменных, называемая *интегрантом*. Отрезок $[t_0, t_1]$ предполагается фиксированным и конечным, $t_0 < t_1$. Экстремум в задаче рассматривается среди непрерывно дифференцируемых функций $x \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R})$, удовлетворяющих *условиям на концах*, или *краевым условиям*: $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$. Такие функции называются *допустимыми*.

Введем норму в пространстве $C^1([t_0, t_1])$:

$$\|y\|_{C^1([t_0,t_1])} := \max\{\|y\|_{C([t_0,t_1])}, \|\dot{y}\|_{C([t_0,t_1])}\},$$

где $\|y\|_{C([t_0,t_1])} := \max\{|y(t)| \mid t \in [t_0, t_1]\}$. Для краткости введем следующие обозначения

$$\|y\|_0 := \|y\|_{C([t_0,t_1])}, \quad \|y\|_1 := \|y\|_{C^1([t_0,t_1])},$$

которыми будем пользоваться в дальнейшем.

Определение. Говорим, что допустимая функция $\hat{x}$ доставляет *слабый локальный минимум* в задаче (P), и пишем $\hat{x} \in \operatorname{wlocmin}^* P$, если существует $\delta > 0$ такое, что $I(x(\cdot)) \geqslant I(\hat{x}(\cdot))$ для любой допустимой функции x $(x \in D(P))$, для которой $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_1 < \delta$.

Наряду со слабым экстремумом в классическом вариационном исчислении также изучается сильный экстремум. При этом расширяется класс функций, среди которых рассматривается задача. Сильный минимум ищется в более широком пространстве, чем $C^1([t_0, t_1])$, а именно, в пространстве кусочно-дифференцируемых функций $PC^1([t_0, t_1])$. Строгое определение сильного экстремума будет дано в главе 5 п. 1.

Однако, как правило, функции доставляющие абсолютный (глобальный) экстремум в C^1 или PC^1, доставляют абсолютный экстремум и среди более широкого класса функций — всех абсолютно непрерывных функций, на которых функционал I определен.

* weak — слабый.

Вывод уравнения Эйлера с помощью основной леммы вариационного исчисления

Пусть функция $\hat{x}$ доставляет слабый локальный экстремум ($\hat{x} \in \operatorname{wlocextr} P$), функции $L, L_x, L_{\dot{x}}$ — непрерывны как функции …нных, $\widehat{L}_{\dot{x}} \in C^1([t_0, t_1])$. Тогда выполнено уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}(t) + \widehat{L}_x(t) = 0 \quad \forall\, t \in [t_0, t_1].$$

Здесь $\widehat{L}_{\dot{x}}(t) := \dfrac{d}{d\dot{x}} L(t, x, \dot{x})\Big|_{\substack{x=\hat{x}(t)\\ \dot{x}=\dot{\hat{x}}(t)}}$, аналогично $\widehat{L}_x(t) := \dfrac{d}{dx} L(t, x, \dot{x})\Big|_{\substack{x=\hat{x}(t)\\ \dot{x}=\dot{\hat{x}}(t)}}$.

Выписанное дифференциальное уравнение второго порядка было впервые в 1744 году выведено Эйлером. Он, аппроксимируя кривые ломаными, вывел уравнение, которому были должны удовлетворять экстремали. Впоследствии Лагранж назвал его *уравнением Эйлера*. Сам Лагранж выводил это уравнение (в 1759 году) вариируя кривую, подозреваемую на экстремум. Выделил из приращения функционала главные линейные части, которые называл *вариациями*, и воспользовался тем, что в точке экстремума вариация должна обращаться в нуль. Метод вариации Лагранжа стал общепринятым. Этим методом мы и выведем далее уравнение Эйлера.

Функции, удовлетворяющие уравнению Эйлера задачи (P), называются *экстремалями*. Множество экстремалей обозначаем $E(P)$. Допустимые функции (класса C^1 с заданными граничными условиями), удовлетворяющие уравнению Эйлера, называются *допустимыми экстремалями*. Множество допустимых экстремалей обозначаем $DE(P)$.

Доказательство. Возьмем произвольную, но фиксированную функцию $h \in C_0^1([t_0, t_1])$. Здесь мы пользуемся следующим обозначением:

$$C_0^1([t_0, t_1]) = \{h(\cdot) \in C^1([t_0, t_1]) \mid h(t_0) = h(t_1) = 0\}.$$

Поскольку $\hat{x} \in \operatorname{wlocextr} P$, то функция одного переменного

$$\varphi(\lambda) := I(\hat{x}(\cdot) + \lambda h(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \hat{x}(t) + \lambda h(t), \dot{\hat{x}}(t) + \lambda \dot{h}(t))\, dt$$

имеет экстремум при $\lambda = 0$. Положим $F(t, \lambda) = L(t, \hat{x}(t) + \lambda h(t), \dot{\hat{x}}(t) + \lambda \dot{h}(t))$. Из условий гладкости, наложенных на $L, \hat{x}, h$, следует, что функция φ дифференцируема в нуле. (Действительно, функции F и F_λ непрерывны в некотором прямоугольнике $[t_0, t_1] \times [-\lambda_0, \lambda_0]$, и, значит по известной теореме из анализа можно дифференцировать под знаком интеграла.) Но тогда по теореме Ферма $\varphi'(0) = 0$. Дифференцируя функцию φ и полагая $\lambda = 0$, получаем

$$\varphi'(0) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\widehat{L}_{\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \widehat{L}_x(t)h(t)\right) dt = 0 \quad \forall\, h \in C_0^1([t_0, t_1]). \qquad (1)$$

Проинтегрируем по частям первое слагаемое в соотношении (1) для $h \in C_0^1([t_0, t_1])$ (здесь мы пользуемся условием теоремы, что $\widehat{L}_{\dot{x}} \in C^1([t_0, t_1])$):

$$\int_{t_0}^{t_1} \widehat{L}_{\dot{x}} \dot{h}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \widehat{L}_{\dot{x}} dh = \widehat{L}_{\dot{x}}(t)h(t)\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} h \frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}\, dt = -\int_{t_0}^{t_1} h \frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}\, dt.$$

Свободные члены при интегрировании по частям равняются нулю, так как $h(t_0) = h(t_1) = 0$. Тогда соотношение (1) перепишется в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}(t) + \widehat{L}_x(t)\right) h(t)\, dt = 0 \quad \forall\, h \in C_0^1([t_0, t_1]). \qquad (2)$$

Основная лемма классического вариационного исчисления (лемма Лагранжа). *Пусть функция a непрерывна на отрезке $[t_0, t_1]$ ($a \in C([t_0, t_1])$) и*

$$\int_{t_0}^{t_1} a(t)h(t)\, dt = 0 \quad \forall\, h \in C_0^1([t_0, t_1]).$$

Тогда $a(t) \equiv 0$.

Доказательство леммы. Предположим $a(\tau) \neq 0$ в некоторой точке $\tau \in [t_0, t_1]$ (допустим $a(\tau) > 0$). Тогда в силу непрерывности функция $a(t) > 0$ и в некоторой окрестности точки τ, например, отрезке $[\tau_0, \tau_1] \subset [t_0, t_1]$.

Пусть $h \in C_0^1([t_0, t_1])$ — положительная в этой окрестности функция и равная нулю вне ее, типа «шапочки», например,

$$h(t) = \begin{cases} (t-\tau_0)^2(t-\tau_1)^2, & \tau \in [\tau_0, \tau_1], \\ 0, & \tau \notin [\tau_0, \tau_1]. \end{cases}$$

Тогда $h \in C_0^1([t_0, t_1])$ — допустимая в лемме функция, но

$$\int_{t_0}^{t_1} a(t)h(t)\, dt > 0,$$

что противоречит условию леммы. Лемма Лагранжа доказана. ∎

По лемме Лагранжа из соотношения (2) вытекает уравнение Эйлера. ∎

1.3. Вывод уравнения Эйлера с помощью леммы Дюбуа-Реймона

В этом пункте мы выведем уравнение Эйлера для меньших условий гладкостей, наложенных на интегрант L. Вместо леммы Лагранжа будем использовать лемму Дюбуа-Реймона.

Теорема. *Пусть функция $\widehat{x}$ доставляет слабый локальный экстремум в задаче (P) ($\widehat{x} \in \mathrm{wlocextr}\, P$), функции $L, L_x, L_{\dot{x}}$ — непрерывны в некоторой окрестности расширенного графика $\Gamma_{\widehat{x}\dot{\widehat{x}}} := \{(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)) \mid t \in [t_0, t_1]\}$ ($L, L_x, L_{\dot{x}} \in C(\mathcal{O}(\Gamma_{\widehat{x}\dot{\widehat{x}}}))$). Тогда $\widehat{L}_{\dot{x}}$ — непрерывно дифференцируемая функция ($\widehat{L}_{\dot{x}} \in C^1([t_0, t_1])$) и выполнено уравнение Эйлера*

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}(t) + \widehat{L}_x(t) = 0 \quad \forall\, t \in [t_0, t_1].$$

Доказательство. Возьмем произвольную, но фиксированную функцию $h \in C_0^1([t_0, t_1])$. Поскольку $\widehat{x} \in \mathrm{wlocextr}\, P$, то функция одного переменного

$$\varphi(\lambda) := I(\widehat{x}(\cdot) + \lambda h(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \widehat{x}(t) + \lambda h(t), \dot{\widehat{x}}(t) + \lambda \dot{h}(t))\, dt$$

имеет экстремум при $\lambda = 0$. Положим $F(t, \lambda) = L(t, \widehat{x}(t) + \lambda h(t), \dot{\widehat{x}}(t) + \lambda \dot{h}(t))$. Из условий гладкости, наложенных на $L, \widehat{x}, h$, следует, что функция φ дифференцируема в нуле. (Действительно, функции F и F_λ непрерывны в некотором прямоугольнике $[t_0, t_1] \times [-\lambda_0, \lambda_0]$, и, значит по известной теореме из анализа можно дифференцировать под знаком интеграла.) Но тогда по теореме Ферма $\varphi'(0) = 0$. Дифференцируя функцию φ и полагая $\lambda = 0$, получаем

$$\varphi'(0) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\widehat{L}_x(t)h(t) + \widehat{L}_{\dot{x}}(t)\dot{h}(t)\right) dt = 0 \quad \forall\, h \in C_0^1([t_0, t_1]). \qquad (1)$$

Здесь мы не можем, как в предыдущем случае, брать второй интеграл по частям, поскольку не задана дифференцируемость функции $\widehat{L}_{\dot{x}}$.

Уравнение (1) означает, что вариация по Лагранжу функционала I равна нулю:

$$\delta I(\widehat{x}(\cdot), h(\cdot)) = 0 \quad \forall\, h \in C_0^1([t_0, t_1]).$$

Лемма Дюбуа-Реймона. *Пусть функции* $a_0, a_1 \in C([t_0,\, t_1])$ *и*

$$\int_{t_0}^{t_1} \big(a_1(t)\dot h(t) + a_0(t)h(t)\big)\,dt = 0 \quad \forall\, h \in C_0^1([t_0,\, t_1]).$$

Тогда функция $a_1 \in C^1([t_0,\, t_1])$ *и выполняется дифференциальное уравнение* $-\dfrac{d}{dt}a_1(t) + a_0(t) = 0\ \forall\, t \in [t_0,\, t_1]$ (аналог уравнения Эйлера).

Из леммы Дюбуа-Реймона и соотношения (1) следует утверждение теоремы.

Доказательство леммы. Возьмем функцию $p \in C^1([t_0,\, t_1])$ такую, что

$$\dot p(t) = a_0(t), \qquad \int_{t_0}^{t_1} p(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} a_1(t)\,dt.$$

Она существует, так как $\dot p(t) = a_0(t)$ — дифференциальное уравнение 1-го порядка, решение которого определено с точностью до константы, а выбором константы можно удовлетворить второе условие. Тогда для любой функции $h \in C_0^1([t_0,\, t_1])$ по условию леммы должно выполняться равенство

$$\int_{t_0}^{t_1} \big(a_1(t)\dot h(t) + a_0(t)h(t)\big)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} a_1(t)\dot h(t)\,dt + \int_{t_0}^{t_1} h(t)\,dp(t) =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} a_1(t)\dot h(t)\,dt + h(t)p(t)\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} p(t)\dot h(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \big(a_1(t) - p(t)\big)\dot h(t)\,dt = 0. \quad (2)$$

Возьмем функцию $\bar h(t) = \int_{t_0}^{t} \big(a_1(\tau) - p(\tau)\big)\,d\tau$. Тогда $\dot{\bar h} = a_1 - p$ и $\bar h \in C_0^1([t_0,\, t_1])$. Действительно, равенство $\bar h(t_0) = 0$ следует из определения функции $\bar h$, равенство $\bar h(t_1) = 0$ вытекает в силу выбора функции p: $\bar h(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \big(a_1(t) - p(t)\big)\,dt = 0$. Значит для функции $\bar h$ должно выполняться равенство (2), то есть $\int_{t_0}^{t_1} (a_1 - p)^2\,dt = 0$. Отсюда следует, что $a_1(t) \equiv p(t)$. Таким образом $a_1 \in C^1([t_0,\, t_1])$ и $-\dfrac{d}{dt}a_1(t) + a_0(t) = 0$. Лемма Дюбуа-Реймона, а вместе с ней и теорема доказаны. ■

1.4. Векторный случай

Мы сформулировали теорему для одномерной простейшей задачей классического вариационного исчисления. Аналогично ставится векторная задача и формулируются необходимые условия экстремума.

Пусть $x(t) = \big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big)$ — n-мерная вектор-функция, интегрант $L = L(t, x_1, \dots, x_n, \dot x_1, \dots, \dot x_n)$ — функция $2n+1$ переменного. Рассмотрим задачу

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, x_1, \dots, x_n, \dot x_1, \dots, \dot x_n)\,dt \to \mathrm{extr};$$
$$x_i(t_j) = x_{ij}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 0, 1.$$

Необходимые условия экстремума в простейшей векторной задаче состоят из системы уравнений Эйлера

$$-\frac{d}{dt}\widehat L_{\dot x_i}(t) + \widehat L_{x_i}(t) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Доказательство теоремы в векторном случае тривиально редуцируется к одномерному случаю.

1.5. Интегралы уравнения Эйлера

Если интегрант $L = L(t, x, \dot x)$ не зависит явно от одной из переменных, то уравнение Эйлера сводится к более простым уравнениям.

1. Если интегрант $L = L(t, \dot x)$ не зависит явно от x, то имеет место *интеграл импульса*

$$\widehat L_{\dot x}(t) = \mathrm{const}.$$

2. Если интегрант $L = L(x, \dot x)$ не зависит явно от t, то имеет место *интеграл энергии* (оба названия интегралов взяты из классической механики)

$$\dot{\hat x}(t)\widehat L_{\dot x}(t) - \hat L(t) = \mathrm{const}.$$

Для доказательства интеграла энергии достаточно продифференцировать последнее равенство по t и воспользоваться уравнением Эйлера:

$$\ddot{\hat x}\widehat L_{\dot x} + \dot{\hat x}\frac{d}{dt}\widehat L_{\dot x} - \widehat L_x\dot{\hat x} - \widehat L_{\dot x}\ddot{\hat x} = 0 \iff -\dot{\hat x}\Big(-\frac{d}{dt}\widehat L_{\dot x} + \widehat L_x\Big) = 0.$$

Замечание. Отметим, что при выводе интеграла энергии мы использовали дополнительное предположение о существовании второй производной $\ddot{\hat x}$. Интеграл энергии имеет также лишнюю экстремаль $\hat x(t) = \mathrm{const}$.

1.6. Примеры

Пример 1. $I(x(\cdot)) = \int_0^1 \dot x^2\,dt \to \min;\quad x(0)=0,\quad x(1)=1.$

Уравнение Эйлера: $\ddot x = 0$.

Общее решение: $x = C_1 t + C_2$. Из начальных условий находим единственную допустимую экстремаль: $\hat x = t$.

Докажем, что она доставляет абсолютный минимум в задаче, т.е. $\hat x = t \in \text{absmin}$. Для этого надо показать, что $I(x(\cdot)) \geqslant I(\hat x(\cdot))$ для любой допустимой функции x, или $I(\hat x + h) \geqslant I(\hat x)$ для любого $h \in C_0^1([0,1])$. Действительно,

$$I(\hat x + h) - I(\hat x) = \int_0^1 (\dot{\hat x} + \dot h)^2\,dt - \int_0^1 \dot{\hat x}^2\,dt = 2\int_0^1 \dot{\hat x}\dot h\,dt + \int_0^1 \dot h^2\,dt \geqslant$$

$$\geqslant 2\int_0^1 \dot{\hat x}\dot h\,dt = 2\int_0^1 \dot{\hat x}\,dh = 2\dot{\hat x}h\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \ddot{\hat x}h\,dt = 0.$$

Таким образом разность всегда неотрицательна, то есть имеем абсолютный минимум.

Пример 2.

$$I(x(\cdot)) = \int_0^{3\pi/2} (\dot x^2 - x^2)\,dt \to \min;\quad x(0) = x\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0.$$

Уравнение Эйлера: $\ddot x + x = 0$.

Общее решение: $x = C_1 \sin t + C_2 \cos t$. Из начальных условий находим единственную допустимую экстремаль: $\hat x = 0$. Покажем, что она не доставляет локального минимума, т.е. $\hat x \notin \text{wlocmin}$.

Рассмотрим последовательность функций $x_n(t) = \frac{1}{n}\sin\frac{2t}{3}$. Очевидно, что x_n — допустимые функции и $x_n \to \hat x$ в метрике пространства $C^1([0,1])$, но при этом

$$I(x_n(\cdot)) = \frac{1}{n^2}\int_0^{3\pi/2}\left(\frac{4}{9}\cos^2\frac{2t}{3} - \sin^2\frac{2t}{3}\right)dt = \frac{1}{n^2}\frac{3\pi}{4}\left(\frac{4}{9} - 1\right) < 0 = I(\hat x(\cdot)).$$

Получили, что значение функционала на x_n меньше, чем на $\hat x$, значит $\hat x$ не доставляет слабого локального минимума. Из этого примера видно, что уравнение Эйлера — необходимое, но не достаточное условие экстремума.

1.7. Задачи

1.1. $\int_0^1 \dot x^2\,dt \to \text{extr};\quad x(0)=1,\quad x(1)=0.$

1.2. $\int_0^1 (\dot x^2 - x)\,dt \to \text{extr};\quad x(0)=x(1)=0.$

1.3. $\int_0^1 (\dot x^2 + tx)\,dt \to \text{extr};\quad x(0)=x(1)=0.$

1.4. $\int_0^1 (\dot x^2 - t^2 x)\,dt \to \text{extr};\quad x(0)=x(1)=0.$

1.5. $\int_1^e t\dot x^2\,dt \to \text{extr};\quad x(1)=0,\quad x(e)=1.$

1.6. $\int_0^1 (1+t)\dot x^2\,dt \to \text{extr};\quad x(0)=0,\quad x(1)=1.$

1.7. $\int_2^3 (t^2-1)\dot x^2\,dt \to \text{extr};\quad x(2)=0,\quad x(3)=1.$

1.8. $\int_0^1 x^2\dot x^2\,dt \to \text{extr};\quad x(0)=1,\quad x(1)=\sqrt{2}.$

1.9. $\int_0^{4/3} \frac{x}{\dot x^2}\,dt \to \text{extr};\quad x(0)=1,\quad x\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{9}.$

1.10. $\int_0^1 e^x\dot x^2\,dt \to \text{extr};\quad x(0)=0,\quad x(1)=\ln 4.$

1.11. $\int_0^1 (\dot x^2 + \dot x x + 12tx)\,dt \to \text{extr};\quad x(0)=x(1)=0.$

1.12. $\int_0^1 (t^2\dot x^2 + 12x^2)\,dt \to \text{extr};\quad x(0)=0,\quad x(1)=1.$

1.13. $\int\limits_{-1}^{1} (\dot{x}^2 + x^2)\, dt \to \text{extr}; \quad x(-1) = x(1) = 1.$

1.14. $\int\limits_{0}^{1} (\dot{x}^2 + x^2 + 4x \operatorname{sh} t)\, dt \to \text{extr}; \quad x(0) = -1, \quad x(1) = 0.$

1.15. $\int\limits_{0}^{1} (\dot{x}^2 + x^2 + 4x \operatorname{ch} t)\, dt \to \text{extr}; \quad x(0) = x(1) = 0.$

1.16. $\int\limits_{0}^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2)\, dt \to \text{extr}; \quad x(0) = 1, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

1.17. $\int\limits_{0}^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2 + 4x \cos t)\, dt \to \text{extr}; \quad x(0) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

1.18. $\int\limits_{0}^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2 - 4x \sin t)\, dt \to \text{extr}; \quad x(0) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

1.19. $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x}\, dt \to \text{extr}; \quad x(0) = 1, \quad x\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

1.20. $\int\limits_{1/2}^{1} \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x}\, dt \to \text{extr}; \quad x\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x(1) = 1.$

1.21. $\int\limits_{-T_0}^{T_0} x\sqrt{1+\dot{x}^2}\, dt \to \text{extr}; \quad x(-T_0) = x(T_0) = \xi$

(задача о минимальной поверхности вращения).

1.22. $\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{\sqrt{x}}\, dt \to \text{extr}; \quad x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1\ (x_0 > 0,\ x_1 > 0)$

(задача о брахистохроне).

1.23. $\int\limits_{0}^{T_0} \sqrt{x+h}\sqrt{1+\dot{x}^2}\, dt \to \text{extr}; \quad x(0) = 0,\ x(T_0) = \xi\ (h > 0)$

(задача о стрельбе).

§ 2. Задача Больца

2.1. Постановка задачи

Задачей Больца называется следующая экстремальная задача без ограничений в пространстве $C^1([t_0, t_1])$:

$$B(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)\, dt + l\big(x(t_0), x(t_1)\big) \to \text{extr}. \qquad (P)$$

Здесь $L = L(t, x, \dot{x})$ — функция трех, а $l = l\big(x(t_0), x(t_1)\big)$ — функция двух переменных. Задача Больца — элементарная задача классического вариационного исчисления. Функционал B называется *функционалом Больца*, функция l — *терминантом*. Любые функции класса $C^1([t_0, t_1])$ являются *допустимыми* в задаче.

Определение. Говорим, что допустимая функция $\hat{x}$ доставляет *слабый локальный минимум* в задаче (P), и пишем $\hat{x} \in \text{wlocmin}\, P$, если существует $\delta > 0$ такое, что $B\big(x(\cdot)\big) \geqslant B\big(\hat{x}(\cdot)\big)$ для любой допустимой функции x, для которой $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_1 < \delta$.

2.2. Необходимое условие экстремума

Теорема. *Пусть функция $\hat{x}$ доставляет слабый локальный экстремум в задаче (P) ($\hat{x} \in \text{wlocextr}\, P$), функции $L, L_x, L_{\dot{x}}$ — непрерывны в некоторой окрестности расширенного графика $\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}}$: $= \{(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \mid t \in [t_0, t_1]\}$ $\big(L, L_x, L_{\dot{x}} \in C(\mathcal{O}(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}}))\big)$, функция l — непрерывно дифференцируема в окрестности точки $(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1))$ $\big(l \in C^1(\mathcal{O}(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1)))\big)$. Тогда $\widehat{L}_{\dot{x}}$ непрерывно дифференцируемая функция $\big(\widehat{L}_{\dot{x}} \in C^1([t_0, t_1])\big)$ и выполнены*

a) *уравнение Эйлера*

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}(t) + \widehat{L}_x(t) = 0 \quad \forall\, t \in [t_0, t_1];$$

b) *условия трансверсальности*

$$\widehat{L}_{\dot{x}}(t_0) = \hat{l}_{x(t_0)}, \quad \widehat{L}_{\dot{x}}(t_1) = -\hat{l}_{x(t_1)}.$$

Доказательство. Возьмем произвольную, но фиксированную функцию $h \in C^1([t_0, t_1])$. Поскольку $\hat{x} \in \text{locextr}\, P$, то функция одного переменного

$$\varphi(\lambda) := B\big(\hat{x}(\cdot) + \lambda h(\cdot)\big) =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} L\big(t, \hat{x}(t) + \lambda h(t), \dot{\hat{x}}(t) + \lambda \dot{h}(t)\big)\, dt + l\big(\hat{x}(t_0) + \lambda h(t_0), \hat{x}(t_1) + \lambda h(t_1)\big)$$

имеет экстремум при $\lambda = 0$. Но тогда по теореме Ферма $\varphi'(0) = 0$. Дифференцируя функцию φ и полагая $\lambda = 0$, получаем

$$\varphi'(0) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\widehat{L}_{\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \widehat{L}_x(t)h(t)\right) dt + \hat{l}_{x(t_0)}h(t_0) + \hat{l}_{x(t_1)}h(t_1) = 0$$

$$\forall\, h \in C^1([t_0,\, t_1]). \qquad (1)$$

Равенство (1) выполняется для любой функции $h \in C^1([t_0,\, t_1])$, а значит и для функций $h \in C_0^1([t_0,\, t_1])$. Следовательно, из (1) вытекает, что

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\widehat{L}_{\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \widehat{L}_x(t)h(t)\right) dt = 0 \quad \forall\, h \in C_0^1([t_0,\, t_1]).$$

Отсюда по лемме Дюбуа-Реймона функция $\widehat{L}_{\dot{x}} \in C^1([t_0,\, t_1])$ и выполняется дифференциальное уравнение

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}(t) + \widehat{L}_x(t) = 0 \quad \forall\, t \in [t_0,\, t_1]$$

— уравнение Эйлера.

Для завершения доказательства теоремы осталось вывести условия трансверсальности. Проинтегрируем по частям первый интеграл в соотношении (1) (оно стало возможным в силу доказанного включения $\widehat{L}_{\dot{x}}(t) \in C^1([t_0, t_1])$):

$$\int_{t_0}^{t_1} \widehat{L}_{\dot{x}}(t)\dot{h}(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \widehat{L}_{\dot{x}}(t)\, dh(t) = \widehat{L}_{\dot{x}}(t)h(t)\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} h(t)\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}(t)\, dt.$$

Подставляя полученное выражение в соотношение (1) и учитывая уже доказанное уравнение Эйлера, получим

$$\varphi'(0) = \int_{t_0}^{t_1} \left(-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}(t) + \widehat{L}_x(t)\right)h(t)\, dt +$$
$$+ \left(\widehat{L}_{\dot{x}}(t_1) + \hat{l}_{x(t_1)}\right)h(t_1) + \left(-\widehat{L}_{\dot{x}}(t_0) + \hat{l}_{x(t_0)}\right)h(t_0) =$$
$$= \left(\widehat{L}_{\dot{x}}(t_1) + \hat{l}_{x(t_1)}\right)h(t_1) + \left(-\widehat{L}_{\dot{x}}(t_0) + \hat{l}_{x(t_0)}\right)h(t_0) = 0 \quad \forall\, h \in C^1([t_0,\, t_1]). \qquad (2)$$

Подставляя в (2) последовательно $h(t) = t - t_1$ и $h(t) = t - t_0$, придем к условиям трансверсальности $\widehat{L}_{\dot{x}}(t_0) = \hat{l}_{x(t_0)}$ и $\widehat{L}_{\dot{x}}(t_1) = -\hat{l}_{x(t_1)}$. Тем самым теорема полностью доказана. ■

2.3. Многомерный случай

Мы сформулировали теорему для одномерной задачи Больца классического вариационного исчисления. Совершенно аналогично ставится векторная задача Больца и формулируются необходимые условия экстремума.

Пусть $x(t) = \left(x_1(t), \ldots, x_n(t)\right)$ — n-мерная вектор-функция, интегрант $L = L\left(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n\right)$ — функция $2n+1$ переменного, терминант $l = l\left(x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0), x_1(t_1), \ldots, x_n(t_1)\right)$ — функция $2n$ переменных. Рассмотрим задачу

$$\int_{t_0}^{t_1} L\left(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n\right) dt +$$
$$+ l\left(x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0), x_1(t_1), \ldots, x_n(t_1)\right) \to \mathrm{extr}.$$

Укажем на необходимые изменения при формулировке условий экстремума для векторного случая.

Необходимые условия экстремума в векторной задаче Больца состоят из системы n уравнений Эйлера

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}_i}(t) + \widehat{L}_{x_i}(t) = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

и системы $2n$ условий трансверсальности

$$\widehat{L}_{\dot{x}_i}(t_0) = \hat{l}_{x_i(t_0)}, \quad \widehat{L}_{\dot{x}_i}(t_1) = -\hat{l}_{x_i(t_1)}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Доказательство теоремы в векторном случае тривиально редуцируется к одномерному случаю. Действительно, фиксируем у вектор-функции $x(\cdot) = ((x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot))$ компоненты кроме $x_i(\cdot)$. Тогда функционал Больца будет зависеть только от одной функции $x_i(\cdot)$: $B(x_i(\cdot)) = B((\hat{x}_1(\cdot), \ldots, \hat{x}_{i+1}(\cdot), x_i(\cdot), \hat{x}_{i-1}(\cdot), \ldots, \hat{x}_n(\cdot))$. А для одномерного случая необходимые условия экстремума — уравнение Эйлера и условия трансверсальности по $x_i(\cdot)$ уже доказаны.

Каждое уравнение Эйлера — дифференциальное уравнение второго порядка — содержит при интегрировании две константы. Всего — $2n$ констант интегрирования. Для их нахождения у нас есть $2n$ уравнений — условий трансверсальности. В таком случае, когда количество неизвестных совпадает с количеством уравнений для их нахождения, мы говорим о *полноте набора условий* для нахождения экстремали.

Как правило, во всех наших задачах мы имеем полный набор условий для определения неизвестных.

2.4. Пример

$$B(x(\cdot)) = \int_0^1 (\dot x^2 - x)\,dt + x^2(1) \to \text{extr}.$$

Необходимые условия:

a) уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot x} + L_x = 0 \iff 2\ddot x + 1 = 0;$$

b) условия трансверсальности

$$L_{\dot x}(0) = l_{x(0)}, \quad L_{\dot x}(1) = -l_{x(1)} \iff \dot x(0) = 0, \quad \dot x(1) = -x(1).$$

Общее решение уравнения Эйлера: $x = -\frac{t^2}{4} + C_1 t + C_2$. Из условий трансверсальности находим, что $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{3}{4}$. Таким образом, имеется единственная допустимая экстремаль $\hat x = \frac{3-t^2}{4}$. Покажем, что она доставляет абсолютный минимум в задаче. Действительно, если $h \in C^1([0,1])$, то

$$B(\hat x + h) - B(\hat x) = \int_0^1 2\dot{\hat x}\dot h\,dt + \int_0^1 \dot h^2\,dt - \int_0^1 h\,dt + 2\hat x(1)h(1) + h^2(1).$$

Интегрируя по частям и учитывая, что $\hat x$ удовлетворяет уравнению Эйлера $2\ddot x + 1 = 0$ и условиям трансверсальности $\dot x(0) = 0, \dot x(1) = -x(1)$, а также отбрасывая неотрицательные члены $\int_0^1 \dot h^2\,dt$ и $h^2(1)$, получим

$$B(\hat x(\cdot) + h(\cdot)) - B(\hat x(\cdot)) = 2\dot{\hat x}(t)h(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 (2\ddot{\hat x}(t) + 1)h(t)\,dt +$$

$$+ \int_0^1 \dot h^2(t)\,dt + 2\hat x(1)h(1) + h^2(1) \geqslant 2(\dot{\hat x}(1) + \hat x(1))h(1) - 2\dot{\hat x}(0)h(0) = 0.$$

Таким образом, $\hat x = \frac{3-t^2}{4} \in \text{absmin}$.

$$S_{\min} = B(\hat x) = \int_0^1 \left(\frac{t^2}{4} - \frac{3}{4} + \frac{t^2}{4}\right)dt + \frac{1}{4} = \left(\frac{t^3}{6} - \frac{3t}{4}\right)\Big|_0^1 + \frac{1}{4} = \frac{2-9+3}{12} = -\frac{1}{3}.$$

Очевидно, что $S_{\max} = +\infty$. Действительно, возьмем последовательность функций $x_n(t) = n$, тогда $B(x_n(\cdot)) = -n + n^2 \to +\infty$ при $n \to \infty$.

2.5. Задачи Больца

2.1. $\displaystyle\int_0^1 (\dot x^2 - x)\,dt - \frac{x^2(1)}{2} \to \text{extr}.$

2.2. $\displaystyle\int_0^1 (\dot x^2 + x^2)\,dt - 2x(1)\operatorname{sh} 1 \to \text{extr}.$

2.3. $\displaystyle\int_0^\pi (\dot x^2 + x^2 - 4x\sin t)\,dt + 2x^2(0) + 2x(\pi) - x^2(\pi) \to \text{extr}.$

2.4. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\dot x^2 - x^2)\,dt + x^2(0) - x^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4x\left(\frac{\pi}{2}\right) \to \text{extr}.$

2.5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\dot x^2 - x^2 - 2x)\,dt - 2x^2(0) - x^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \to \text{extr}.$

2.6. $\displaystyle\int_0^1 (\dot x_1\dot x_2 + x_1x_2)\,dt + x_1(0)x_2(1) + x_1(1)x_2(0) \to \text{extr}.$

2.7. $\displaystyle\int_0^{e-1} (t+1)\dot x^2\,dt + 2x(0)\big(x(e-1) + 1\big) \to \text{extr}.$

2.8. $\displaystyle\int_1^2 t^2\dot x^2\,dt - 2x(1) + x^2(2) \to \text{extr}.$

2.9. $\displaystyle\int_1^e 2(t\dot x^2 + \dot x x)\,dt + 3x^2(1) - x^2(e) - 4x(e) \to \text{extr}.$

2.10. $\displaystyle\int_0^3 4\dot x^2 x^2\,dt + x^4(0) - 8x(3) \to \text{extr}.$

2.11. $\displaystyle\int_0^1 e^x\dot x^2\,dt + 4e^{x(0)} + 32e^{-x(1)} \to \text{extr}.$

2.12. $\displaystyle\int_0^1 e^{t+1}(\dot x^2 + 2x^2)\,dt + 2x(1)\big(x(0) + 1\big) \to \text{extr}.$

§ 3. Задача с подвижными концами

3.1. Постановка задачи

Задачей с подвижными концами называется следующая экстремальная задача в пространстве $C^1(\Delta) \times \mathbf{R}^2$:

$$I(\xi) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, \dot{x})\,dt + \psi_0\big(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)\big) \to \text{extr}; \qquad (P)$$

$$\psi_i\big(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)\big) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \qquad (1)$$

где $\xi = \big(x(\cdot), t_0, t_1\big)$, Δ — заданный конечный отрезок, $t_0, t_1 \in \Delta$, $t_0 < t_1$.

Частным случаем является задача, в которой один из концов или даже оба закреплены.

Элемент $\xi = (x(\cdot), t_0, t_1)$ называется *допустимым*, если $x \in C^1(\Delta)$, $t_0, t_1 \in \Delta$, $t_0 < t_1$, и выполняются условия (1) на концах.

Определение. Говорим, что допустимый элемент $\hat{\xi} = (\hat{x}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ доставляет *слабый локальный минимум* в задаче (P), и пишем $\hat{\xi} \in \text{wlocmin}\, P$, если существует $\delta > 0$ такое, что $I(\xi) \geqslant I(\hat{\xi})$ для любого допустимого элемента $\xi = \big(x(\cdot), t_0, t_1\big)$, для которого $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C^1(\Delta)} < \delta$, $|t_0 - \hat{t}_0| < \delta$, $|t_1 - \hat{t}_1| < \delta$.

3.2. Необходимые условия экстремума

Теорема. *Пусть элемент $\hat{\xi} = \big(\hat{x}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1\big)$ доставляет слабый локальный экстремум в задаче (P) ($\hat{\xi} \in \text{wlocextr}\, P$), функции $L, L_x, L_{\dot{x}}$ — непрерывны в некоторой окрестности расширенного графика $\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}} := \big\{\big(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)\big) \mid t \in \Delta\big\}$ $\big(L, L_x, L_{\dot{x}} \in C\big(\mathcal{O}(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}})\big)\big)$, функции ψ_i — непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $\big(\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), \hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1)\big)$ $\big(\psi_i \in C^1\big(\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), \hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1)\big)\big)$, $i = 0, 1, \dots, m$. Тогда существует ненулевой вектор множителей Лагранжа $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_m) \in \mathbf{R}^{m+1}$, $\lambda \neq 0$, такой, что для функции Лагранжа*

$$\Lambda = \int_{t_0}^{t_1} \lambda_0 f(t, x, \dot{x})\,dt + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \psi_i\big(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)\big)$$

выполнены условия:

a) *стационарности по x — уравнение Эйлера для интегранта* $L = \lambda_0 f(t, x, \dot{x})$

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}(t) + \widehat{L}_x(t) = 0 \quad \forall\, t \in \Delta \iff -\frac{d}{dt}\lambda_0 \hat{f}_{\dot{x}}(t) + \lambda_0 \hat{f}_x(t) = 0;$$

рсальности по x для терминанта $l = \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i \psi_i\big(t_0, x(t_0),$

$$\widehat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x(t_0)} \iff \lambda_0 \hat{f}_{\dot{x}}(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x(t_0)},$$
$$\widehat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x(t_1)} \iff \lambda_0 \hat{f}_{\dot{x}}(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x(t_1)};$$

c) *стационарности по подвижным концам (выписывается только для подвижных концов отрезка интегрирования)*:

$$\hat{\Lambda}_{t_0}(\hat{t}_0) = 0 \iff -\lambda_0 \hat{f}(\hat{t}_0) + \hat{l}_{t_0} + \hat{l}_{x(t_0)}\dot{\hat{x}}(\hat{t}_0) = 0,$$
$$\hat{\Lambda}_{t_1}(\hat{t}_1) = 0 \iff \lambda_0 \hat{f}(\hat{t}_1) + \hat{l}_{t_1} + \hat{l}_{x(t_1)}\dot{\hat{x}}(\hat{t}_1) = 0.$$

Необходимые условия экстремума в задаче с подвижными концами непосредственно будут вытекать из необходимых условий экстремума в задаче Лагранжа п. 6.2.

3.3. Пример

$$I(x(\cdot), T) = \int_0^T (\dot{x}^2 - x + 1)\,dt \to \text{extr}; \quad x(0) = 0.$$

Решение. Функция Лагранжа:

$$\Lambda = \int_0^T \lambda_0(\dot{x}^2 - x + 1)\,dt + \lambda_1 x(0).$$

Необходимые условия:

a) уравнение Эйлера для интегранта $L = \lambda_0(\dot{x}^2 - x + 1)$

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0 \iff -2\lambda_0 \ddot{x} - \lambda_0 = 0;$$

b) трансверсальность по x для терминанта $l = \lambda_1 x(0)$

$$L_{\dot{x}}(0) = l_{x(0)}, \ L_{\dot{x}}(T) = -l_{x(T)} \iff 2\lambda_0 \dot{x}(0) = \lambda_1, \ 2\lambda_0 \dot{x}(T) = 0;$$

c) стационарности по T (выписываем только для подвижного конца отрезка интегрирования)

$$\Lambda_T(T) = 0 \iff \lambda_0(\dot{x}^2(T) - x(T) + 1) = 0.$$

Если $\lambda_0 = 0$, то из b) следует, что $\lambda_1 = 0$ — все множители Лагранжа оказались нулями. Если $\lambda_0 \neq 0$, то положим $\lambda_0 = 1$. Тогда условия a)–c) преобразуются к виду

$$-2\ddot{x} - 1 = 0, \quad \dot{x}(T) = 0, \quad x(T) = 1.$$

Из первого уравнения следует, что $x = -\frac{t^2}{4} + C_1 t + C_2$. Поскольку $x(0) = 0$, то $C_2 = 0$. Неизвестные C_1, T определяются из условий

$$\begin{cases} \dot{x}(T) = 0, \\ x(T) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -\dfrac{T}{2} + C_1 = 0, \\ -\dfrac{T^2}{4} + C_1 T = 1. \end{cases}$$

Отсюда находим, что $\widehat{T} = 2$, $C_1 = 1$.

Таким образом, в задаче имеется единственный допустимый экстремальный элемент $\hat{\xi} = (\hat{x}(\cdot), \widehat{T}) = \left(-\frac{t^2}{4} + t, 2\right)$.

Покажем, что $\hat{\xi}$ не доставляет локального экстремума, т.е. что в любой его окрестности существует другой допустимый элемент, на котором значение функционала I в точке ξ как больше, так и меньше значения функционала I в точке $\hat{\xi}$. Действительно, возьмем элемент $\xi = (x(\cdot), T) = \left(-\frac{t^2}{4} + t,\ T\right)$. Тогда

$$I(\xi) = \int_0^T \left(\left(-\frac{t}{2} + 1\right)^2 - \left(-\frac{t^2}{4} + t\right) + 1\right) dt =$$

$$= 2\int_0^T \left(\frac{t}{2} - 1\right)^2 dt > I(\hat{\xi}) = 2\int_0^2 \left(\frac{t}{2} - 1\right)^2 dt$$

при $T > \widehat{T}$ и $I(\xi) < I(\hat{\xi})$ при $T < \widehat{T}$, поскольку под знаком интеграла стоит неотрицательная величина.

Найдем абсолютный минимум в задаче. Возьмем последовательность элементов $\xi_n = (x_n(\cdot), T_n) = (t, n)$; тогда $I(\xi_n) = \int_0^n (2 - t)\, dt \to -\infty$ при $n \to +\infty$, т.е. $S_{\min} = -\infty$. Если вместо исходной задачи с подвижным правым концом T рассмотреть задачу с фиксированным $T = T_0$, то нетрудно вывести, что функция, доставляющая абсолютный минимум в новой задаче, существует (ее легко найти, решая задачу с фиксированным T_0) и абсолютный минимум в задаче будет конечным для каждого фиксированного T_0. При этом значение абсолютного минимума будет стремиться к $-\infty$ при $T_0 \to +\infty$.

Найдем абсолютный максимум в задаче. Возьмем последовательность элементов $\xi_n = (x_n(\cdot), T_n) = (nt, 1)$; тогда $I(x_n(\cdot), T) = \int_0^1 (n^2 - nt + 1)\, dt \to +\infty$ при $n \to +\infty$, т.е. $S_{\max} = +\infty$.

3.4. Задачи с подвижными концами

3.1. $\displaystyle\int_0^1 \dot{x}^2\, dt - 2x^2(1) \to \text{extr}; \quad x(0) = 0.$

3.2. $\displaystyle\int_0^1 (\dot{x}^2 + x)\, dt \to \text{extr}; \quad x(1) = 0.$

3.3. $\displaystyle\int_0^T \dot{x}^2\, dt \to \text{extr}; \quad x(0) = 0,\ T + x(T) + 1 = 0.$

3.4. $\displaystyle\int_0^T \dot{x}^2\, dt \to \text{extr}; \quad x(0) = 0,\ (T - 1)x^2(T) + 2 = 0.$

3.5. $\displaystyle\int_0^T \dot{x}^3\, dt \to \text{extr}; \quad x(0) = 0, \quad T + x(T) = 1.$

3.6. $\displaystyle\int_0^T (\dot{x}^2 + x)\, dt \to \text{extr}; \quad x(0) = 1.$

3.7. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} (\dot{x}^2 - x^2)\, dt \to \text{extr}; \quad x(0) = 1.$

3.8. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} (\dot{x}^2 - x^2 + 4x\cos t)\, dt \to \text{extr}; \quad x(0) = 0.$

3.9. $\displaystyle\int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2)\, dt - x^2(1) \to \text{extr}; \quad x(0) = 1.$

3.10. $\displaystyle\int_0^T (\dot{x}^2 + x^2)\, dt \to \text{extr}; \quad x(T) + T - 1 = 0.$

3.11. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}{x}\, dt \to \text{extr}; \quad x(0) = 1.$

3.12. $\displaystyle\int_0^T \frac{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}{x}\, dt \to \text{extr}; \quad x(0) = 1, \quad x(T) = T - 1.$

3.13. $\displaystyle\int_0^{T_0} x\sqrt{1 + \dot{x}^2}\, dt \to \text{extr}; \quad x(T_0) = \xi.$

§ 4. Изопериметрическая задача

4.1. Постановка задачи

Изопериметрической задачей в вариационном исчислении называется следующая экстремальная задача в пространстве $C^1([t_0, t_1])$:

$$I_0(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \to \mathrm{extr}; \qquad (P)$$

$$I_i(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt = \alpha_i, \quad i = 1, \ldots, m, \qquad (1)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \qquad (2)$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — заданные числа ($\alpha_i \in \mathbb{R}$).

Отрезок $[t_0, t_1]$ является фиксированным и конечным, $t_0 < t_1$. Ограничения вида (1) называются *изопериметрическими*. Экстремум в задаче рассматривается среди функций $x \in C^1([t_0, t_1])$, удовлетворяющих изопериметрическим условиям (1) и условиям (2) на концах; такие функции называются *допустимыми*.

Определение. Говорим, что допустимая функция $\hat{x}$ доставляет *слабый локальный минимум* в задаче (P), и пишем $\hat{x} \in \mathrm{wlocmin}\, P$, если существует $\delta > 0$ такое, что $I_0(x(\cdot)) \geqslant I_0(\hat{x}(\cdot))$ для любой допустимой функции x, для которой $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_1 < \delta$.

4.2. Необходимое условие экстремума

Теорема. *Пусть функция $\hat{x}$ доставляет слабый локальный экстремум в задаче (P) ($\hat{x} \in \mathrm{wlocextr}\, P$), функции $f_i, f_{ix}, f_{i\dot{x}}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, — непрерывны в некоторой окрестности расширенного графика $\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}} := \{(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \mid t \in [t_0, t_1]\}$ $(f_i, f_{ix}, f_{i\dot{x}} \in C(\mathcal{O}(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}})))$.*

Тогда существует вектор множителей Лагранжа $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$, $\lambda \neq 0$, такой, что для лагранжиана $L = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x, \dot{x})$ выполняется условие гладкости $\widehat{L}_{\dot{x}} \in C^1([t_0, t_1])$ и выполнено уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}(t) + \widehat{L}_x(t) = 0 \quad \forall\, t \in [t_0, t_1].$$

Доказательство. Выпишем вариацию по Лагранжу функционала $I(x) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, \dot{x})\, dt$, найденную нами при выводе необходимых условий в простейшей задаче классического вариационного исчисления

$$\delta I(\hat{x}(\cdot), h(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\hat{f}_{\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \hat{f}_x(t)h(t)\right) dt, \quad h \in C_0^1([t_0, t_1]).$$

Рассмотрим следующее линейное отображение $A\colon C_0^1([t_0, t_1]) \to \mathbb{R}^{m+1}$ функционального пространства $C_0^1([t_0, t_1])$ в конечномерное пространство $\mathbb{R}^{m+1}$:

$$Ah = \left(\delta I_0(\hat{x}, h), \delta I_1(\hat{x}, h), \ldots, \delta I_m(\hat{x}, h)\right).$$

Возможны два случая:

1) $\mathrm{Im}\, A \neq \mathbb{R}^{m+1}$, т. е. A — отображение на часть пространства $\mathbb{R}^{m+1}$ (вырожденный случай);

2) $\mathrm{Im}\, A = \mathbb{R}^{m+1}$, т. е. A — отображение на все пространство $\mathbb{R}^{m+1}$ (невырожденный случай).

1) *Вырожденный случай.* Пусть $\mathrm{Im}\, A \neq \mathbb{R}^{m+1}$. Образ линейного пространства при линейном отображении является подпространством. Значит $\mathrm{Im}\, A$ есть подпространство в $\mathbb{R}^{m+1}$ размерности $\leqslant m$. Погрузим его в любое подпространство размерности m (гиперплоскость). Следовательно, найдутся числа $\lambda_0, \ldots, \lambda_m$, не все равные нулю и такие, что

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i z_i = 0 \quad \forall\, z \in \mathrm{Im}\, A \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \delta I_i(\hat{x}(\cdot), h(\cdot)) = 0 \quad \forall\, h \in C_0^1([t_0, t_1]).$$

Откуда из явного вида для $\delta I_i(\hat{x}, h)$ имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \hat{f}_{i\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \hat{f}_{ix}(t)h(t)\right) dt = 0 \quad \forall\, h \in C_0^1([t_0, t_1]).$$

Тогда из леммы Дюбуа-Реймона следует, что для лагранжиана $L = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x, \dot{x})$ выполняется условие гладкости $\widehat{L}_{\dot{x}} \in C^1([t_0, t_1])$ и выполнено уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}(t) + \widehat{L}_x(t) = 0 \quad \forall\, t \in [t_0, t_1].$$

2) *Невырожденный случай.* Пусть $\operatorname{Im} A = \mathbb{R}^{m+1}$. Покажем, что невырожденный случай невозможен. Тем самым теорема будет полностью доказана.

Возьмем $e_0 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_m = (0, \ldots, 0, 1)$ — канонический базис в $\mathbb{R}^{m+1}$. Поскольку образ отображения A $\operatorname{Im} A = \mathbb{R}^{m+1}$, то существуют функции $h_j \in C_0^1([t_0, t_1])$ такие, что $Ah_j = e_j$, $j = 0, 1, \ldots, m$, то есть $\delta I_i(\hat{x}, h_j) = \delta_{ij}$ $\left(\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases} \text{ — символ Кронекера}\right)$.

Рассмотрим функцию $F : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$, действующую по формуле

$$F(\beta) = \left(I_0\Big(\hat{x} + \sum_{j=0}^{m} \beta_j h_j\Big), \ldots, I_m\Big(\hat{x} + \sum_{j=0}^{m} \beta_j h_j\Big)\right).$$

Нетрудно проверить, что построенная функция F непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки $\hat{\beta} = 0$ и $F(\hat{\beta}) = \big(I_0(\hat{x}), \ldots, I_m(\hat{x})\big) = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \hat{\alpha}$ $\big(\alpha_0 := I_0(\hat{x})\big)$. Поскольку якобиан отображения F не равен нулю как определитель единичной матрицы $\big(F'(0) = \big(\delta I_i(\hat{x}, h_j)\big)_{i,j=0}^{m} = I$ — единичная матрица), то по теореме об обратной функции существует обратное отображение F^{-1} некоторой окрестности точки $\hat{\alpha}$ в окрестность точки $\hat{\beta} = F^{-1}(\hat{\alpha}) = 0$ такое, что

$$\left|F^{-1}(\alpha) - F^{-1}(\hat{\alpha})\right| \leqslant K|\alpha - \hat{\alpha}| \iff \left|F^{-1}(\alpha)\right| \leqslant K|\alpha - \hat{\alpha}|$$

с некоторой константой $K > 0$.

Возьмем $\alpha = \alpha(\varepsilon) = (\alpha_0 + \varepsilon, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ при достаточно малом ε и обозначим $\beta(\varepsilon) = F^{-1}\big(\alpha(\varepsilon)\big)$. Тогда $F\big(\beta(\varepsilon)\big) = \alpha(\varepsilon)$, т. е.

$$I_0\Big(\hat{x}(\cdot) + \sum_{j=0}^{m} \beta_j(\varepsilon) h_j(\cdot)\Big) = \alpha_0 + \varepsilon,$$

$$I_i\Big(\hat{x}(\cdot) + \sum_{j=0}^{m} \beta_j(\varepsilon) h_j(\cdot)\Big) = \alpha_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

при этом

$$\left|F^{-1}(\alpha)\right| \leqslant K|\alpha - \hat{\alpha}| \iff \left|\beta(\varepsilon)\right| \leqslant K|\varepsilon|.$$

Получилось, что в любой окрестности экстремальной функции $\hat{x}$ в пространстве $C^1([t_0, t_1])$ существует допустимая функция (а именно $\hat{x}(\cdot) + \sum_{j=0}^{m} \beta_j(\varepsilon) h_j(\cdot)$), на которой значение функционала может быть и больше (при $\varepsilon > 0$), и меньше (при $\varepsilon < 0$) чем на $\hat{x}$. Пришли к противоречию, что $\hat{x}$ не доставляет локального экстремума. Таким образом, случай 2) невозможен.

■

4.3. Пример

$$I(x(\cdot)) = \int_0^1 \dot{x}^2\, dt \to \text{extr}; \quad \int_0^1 x\, dt = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1.$$

Решение. Лагранжиан $L = \lambda_0 \dot{x}^2 + \lambda_1 x$.

Необходимое условие — уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}} + L_x = 0 \iff -2\lambda_0 \ddot{x} + \lambda_1 = 0.$$

Если $\lambda_0 = 0$, то $\lambda_1 = 0$ — все множители Лагранжа — нули. Этого не может быть. Положим $\lambda_0 = 1/2$. Тогда $\ddot{x} = \lambda_1$. Общее решение: $x = C_1 t^2 + C_2 t + C_3$. Неизвестные константы C_1, C_2, C_3 находим из условий на концах и изопериметрических условий:

$x(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$;

$x(1) = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 = 1$;

$\int_0^1 x\, dt = 0 \Rightarrow \int_0^1 (C_1 t^2 + C_2 t)\, dt = 0 \Rightarrow \frac{C_1}{3} + \frac{C_2}{2} = 0.$

Отсюда $C_1 = 3$, $C_2 = -2$. Таким образом, в задаче имеется единственная допустимая экстремаль $\hat{x} = 3t^2 - 2t$.

Покажем с помощью непосредственной проверки, что найденная функция $\hat{x}$ доставляет абсолютный минимум в задаче. Возьмем функцию $h \in C^1([0, 1])$ такую, что $\hat{x} + h$ допустимая. Для этого надо взять функцию h, для которой $h(0) = h(1) = 0$ и $\int_0^1 h\, dt = 0$. Тогда

$$I(\hat{x} + h) - I(\hat{x}) = \int_0^1 (\dot{\hat{x}} + \dot{h})^2\, dt - \int_0^1 \dot{\hat{x}}^2\, dt = 2\int_0^1 \dot{\hat{x}}\dot{h}\, dt + \int_0^1 \dot{h}^2\, dt \geqslant 2\int_0^1 \dot{\hat{x}}\dot{h}\, dt.$$

Интегрируя по частям с учетом условий на h, получим

$$I(\hat{x} + h) - I(\hat{x}) \geqslant 2\int_0^1 \dot{\hat{x}}\, dh = 2\dot{\hat{x}}h\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \ddot{\hat{x}} h\, dt = -12\int_0^1 h\, dt = 0.$$

Таким образом, разность всегда неотрицательна, то есть имеем абсолютный минимум.

$$S_{\min} = \int_0^1 \dot{\hat{x}}^2\, dt = \int_0^1 (6t - 2)^2\, dt = \frac{36t^3}{3} - \frac{24t^2}{2} + 4t\Big|_0^1 = 12 - 12 + 4 = 4.$$

Очевидно, что $S_{\max} = +\infty$. Действительно, возьмем последовательность допустимых функций $x_n(t) = \hat{x}(t) + n \sin 2\pi t$, тогда $I\big(x_n(\cdot)\big) \to +\infty$ при $n \to \infty$.

4.4. Задача Дидоны

Одними из первых задач на отыскание наибольших и наименьших величин являлись изопериметрические задачи о нахождении замкнутой кривой, имеющей заданную длину и охватывающую наибольшую площадь, и о нахождении пространственной замкнутой поверхности, имеющей заданную площадь и охватывающей наибольший объем. Еще до Аристотеля (IV век до н. э.) было известно, что среди изопериметрических (имеющих равную длину) кривых наиболее вместимой является окружность, а среди изопифанных (имеющих равную площадь) поверхностей — сфера.

Изопериметрическая задача содержится также в легенде о царице Дидоне. Описываемые события легенда относит к 825 году до н. э.

Финикийская царица Дидона и с ней небольшая часть жителей города Тира, спасаясь от преследований, покинули родной город и в поисках счастья отправились на кораблях на запад вдоль берегов Средиземного моря. Выбрав на африканском побережье удобное место (нынешний Тунисский залив), Дидона и ее спутники решили основать здесь город. Эта идея не понравилась местным жителям, но все же финикийской царице удалось уговорить их предводителя Ярба, и он простодушно и неосторожно согласился уступить Дидоне клочок земли, «который можно окружить бычьей шкурой». Хитрая финикиянка, разрезав шкуру на тонкие ремни, связала их в один длинный ремень и, окружив им значительную территорию, заложила на ней город Карфаген. В память об этой истории карфагенская цитадель получила название Бирса (шкура).

Из истории город Карфаген помнится нам еще войнами с Римом за обладание господством на Средиземном море (Пунические войны III–II век до н. э.), которые завершились взятием римлянами Карфагена и его разрушением.

Мы видим, что Дидона «решала» классическую изопериметрическую задачу о наибольшей вместимости. Естественно считать, что Дидона хотела сохранить выход к морю. Тогда мы получаем *первую задачу Дидоны*. Среди всех кривых длины l с концами на фиксированной прямой (прямолинейный берег), найти ту, которая ограничивает фигуру наибольшей площади. Формализованная задача имеет вид:

$$\int_{-T}^{T} x\,dt \to \max; \quad \int_{-T}^{T} \sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt = l, \quad x(-T) = x(T) = 0$$

(здесь T — подвижный конец). Эта задача относится к типу задач Лагранжа (см. §6).

Давайте решим *вторую задачу Дидоны*, в которой оба конца кривой закреплены на прямой. Формализованная вторая задача Дидоны имеет вид:

$$\int_{-T_0}^{T_0} x\,dt \to \max; \quad \int_{-T_0}^{T_0} \sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt = l, \quad x(-T_0) = x(T_0) = 0$$

(здесь T_0 — фиксировано). Это — задача, укладывающаяся в схему изопериметрических задач п. 4.1. Приведем ее решение с помощью вариационного исчисления.

Лагранжиан $L = \lambda_0 x + \lambda\sqrt{1+\dot{x}^2}$.

Необходимое условие — уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0 \iff -\frac{d}{dt}\frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} + \lambda_0 = 0.$$

Если $\lambda_0 = 0$, то $\lambda \neq 0$ (не все множители Лагранжа — нули) и значит $\dot{x} = \mathrm{const}$. Тогда из условий на концах и изопериметрического условия следует, что $\hat{x} \equiv 0$, $l = 2T_0$.

Если $\lambda_0 \neq 0$, то положим $\lambda_0 = 1$. Тогда из уравнения Эйлера $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} = 1$. Проинтегрировав по t это уравнение, получим $\dfrac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} = t + C_1$. Выразим из последнего уравнения $\dot{x}$:

$$\lambda^2\dot{x}^2 = (t+C_1)^2(1+\dot{x}^2) \Leftrightarrow \dot{x}^2 = \frac{(t+C_1)^2}{\pm\sqrt{\lambda^2-(t+C_1)^2}} \Leftrightarrow$$

$$\dot{x} = \frac{t+C_1}{\pm\sqrt{\lambda^2-(t+C_1)^2}} \Leftrightarrow dx = \frac{(t+C_1)\,dt}{\pm\sqrt{\lambda^2-(t+C_1)^2}} = \mp d\sqrt{\lambda^2-(t+C_1)^2}.$$

Проинтегрировав по t полученное уравнение, найдем функцию $x(t)$: $x + C_2 = \mp\sqrt{\lambda^2-(t+C_1)^2} \Leftrightarrow (t+C_1)^2 + (x+C_2)^2 = \lambda^2$. Это уравнение окружности. Из условий на концах $x(-T_0) = x(T_0)$ следует, что $C_1 = 0$, т. е. $t^2 + (x+C_2)^2 = \lambda^2$.

Неизвестные константы C_2, λ определяются единственным образом из условия $x(T_0) = 0$ и изопериметрического условия.

При $2T_0 < l \leqslant \pi T_0$ имеется единственная (с точностью до знака) экстремаль, являющаяся дугой длины l окружности, проходящей через точки $(\pm T_0, 0)$, с центром на оси x. Поскольку у нас задача на максимум, то мы выбираем экстремаль, лежащую в верхней полуплоскости. При $l < 2T_0$ в задаче нет допустимых функций, при $l > \pi T_0$ нет допустимых экстремалей. Можно показать, что в этом случае решением будет полуокружность радиуса T_0, «поднятая» на высоту $(l - \pi T_0)/2$ вместе с двумя вертикальными отрезками этой длины.

4.5. Изопериметрические задачи

4.1. $\int_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr}; \quad \int_0^1 x\,dt = 0, \quad x(0) = 1, \quad x(1) = 0.$

4.2. $\int_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr}; \quad \int_0^1 tx\,dt = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1.$

4.3. $\int_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr}; \quad \int_0^1 x\,dt = 1, \quad \int_0^1 tx\,dt = 0, \quad x(0) = x(1) = 0.$

4.4. $\int_0^\pi \dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr}; \quad \int_0^\pi x\cos t\,dt = \frac{\pi}{2}, \quad x(0) = 1, \quad x(\pi) = -1.$

4.5. $\int_0^\pi \dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr}; \quad \int_0^\pi x\sin t\,dt = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 1.$

4.6. $\int_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr}; \quad \int_0^1 xe^{-t}\,dt = e, \quad x(0) = 2e + 1, \quad x(1) = 2.$

4.7. $\int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2)\,dt \to \mathrm{extr}; \quad \int_0^1 xe^t\,dt = \frac{e^2+1}{4}, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = e.$

4.8. $\int_1^2 t^2\dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr}; \quad \int_1^2 tx\,dt = \frac{7}{3}, \quad x(1) = 1, \quad x(2) = 2.$

4.9. $\int_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr}; \quad \int_0^1 x^2\,dt = 1, \quad x(0) = x(1) = 0.$

4.10. $\int_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2)\,dt \to \mathrm{extr}; \quad \int_0^{\pi/2} x\sin t\,dt = 1, \quad x(0) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

4.11. $\int_{-T_0}^{T_0} x\sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt \to \mathrm{extr}; \quad \int_{-T_0}^{T_0} \sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt = l,$
$x(-T_0) = x(T_0) = 0.$

4.12. $\int_0^1 (x_1 + x_2)\,dt \to \mathrm{extr}; \quad \int_0^1 \dot{x}_1\dot{x}_2\,dt = 0,$
$x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(1) = 1, \quad x_2(1) = -3.$

§ 5. Задача со старшими производными

5.1. Постановка задачи

Задачей со старшими производными в классическом вариационном исчислении называется следующая экстремальная задача в пространстве $C^n([t_0, t_1])$:

$$I(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L\big(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), \ldots, x^{(n)}(t)\big)\,dt \to \mathrm{extr}; \qquad (P)$$

$$x^{(k)}(t_j) = x_{kj}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \quad j = 0, 1. \qquad (1)$$

Здесь $L = L(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n)})$ — функция $n+2$ переменных, называемая *интегрантом*. Отрезок $[t_0, t_1]$ является фиксированным и конечным, $t_0 < t_1$. Экстремум в задаче рассматривается среди функций $x \in C^n([t_0, t_1])$, удовлетворяющих условиям на концах (1); такие функции называются *допустимыми*.

Введем норму в пространстве $C^n([t_0, t_1])$:

$$\|y\|_n := \|y\|_{C^n([t_0,t_1])} := \max\left\{\|y\|_{C([t_0,t_1])}, \|\dot{y}\|_{C([t_0,t_1])}, \ldots, \|y^{(n)}\|_{C([t_0,t_1])}\right\}$$

Определение. Говорим, что допустимая функция $\hat{x}$ доставляет *слабый локальный минимум* в задаче (P), и пишем $\hat{x}) \in \mathrm{wlocmin}\,P$, если существует $\delta > 0$ такое, что $I(x(\cdot)) \geqslant I(\hat{x}(\cdot))$ для любой допустимой функции x, для которой $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_n < \delta$.

5.2. Необходимое условие экстремума

Теорема. *Пусть функция $\hat{x}$ доставляет слабый локальный экстремум в задаче (P) ($\hat{x} \in \mathrm{wlocextr}\,P$), функции $L, L_x, L_{\dot{x}}, \ldots, L_{x^{(n)}}$ — непрерывны в некоторой окрестности расширенного графика $\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}\ldots\hat{x}^{(n)}} := \left\{\big(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \ldots, \hat{x}^{(n)}(t)\big) \mid t \in [t_0, t_1]\right\}$ $\big(L, L_x, \ldots, L_{x^{(n)}} \in C\big(\mathcal{O}(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}\ldots\hat{x}^{(n)}})\big)\big)$.*

Тогда $\widehat{L}_{x^{(k)}} \in C^k([t_0, t_1])$, $k = 1, \ldots, n$, и выполнено уравнение Эйлера—Пуассона

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \widehat{L}_{x^{(k)}}(t) = 0 \quad \forall\, t \in [t_0, t_1].$$

При $n = 1$ уравнение Эйлера—Пуассона совпадает с уравнением Эйлера. При $n = 2$ уравнение Эйлера—Пуассона выглядит следующим образом:

$$\frac{d^2}{dt^2}\widehat{L}_{\ddot{x}}(t) - \frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}(t) + \widehat{L}_x(t) = 0.$$

Доказательство. *Вывод уравнения Эйлера—Пуассона методом вариаций.* Вычислим вариацию по Лагранжу функционала I. Возьмем произвольную, но фиксированную функцию $h \in C_0^n([t_0, t_1])$. Здесь мы пользуемся обозначением:

$$C_0^n([t_0,t_1]) = \{h \in C^n([t_0,t_1]) \mid h^{(k)}(t_0) = h^{(k)}(t_1) = 0,\ k = 0,1,\dots,n-1\}.$$

Поскольку $\hat{x} \in \mathrm{wlocextr}\, P$, то функция одного переменного $\varphi(\lambda) := I(\hat{x}+\lambda h) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L\big(t, \hat{x}+\lambda h, \dot{\hat{x}}+\lambda \dot{h}, \dots, \hat{x}^{(n)}+\lambda h^{(n)}\big)\, dt$ имеет экстремум при $\lambda = 0$. Но тогда по теореме Ферма $\varphi'(0) = 0$. Дифференцируя функцию φ и полагая $\lambda = 0$, получаем

$$\varphi'(0) = \delta I(\hat{x}, h) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{k=0}^{n} \widehat{L}_{x^{(k)}}(t) h^{(k)}(t) \right) dt = 0 \ \forall\, h \in C_0^n([t_0,t_1]). \qquad (1)$$

Обобщенная лемма Дюбуа-Реймона. *Пусть* $a_k(\cdot) \in C([t_0, t_1])$ *и* $\int\limits_{t_0}^{t_1} \big(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k(t) h^{(k)}(t)\big)\, dt = 0 \quad \forall\, h \in C_0^n([t_0, t_1])$.
Тогда $a_k \in C^k([t_0, t_1])$ *и* $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} a_k = 0 \quad \forall\, t \in [t_0, t_1]$.

Из леммы Дюбуа-Реймона и соотношения (1) следует утверждение теоремы.

Как и в простейшей задаче вариационного исчисления уравнение Эйлера—Пуассона можно было бы вывести с помощью леммы Лагранжа. В соотношении (1) проинтегрируем по частям слагаемые $\widehat{L}_{x^{(k)}} h^{(k)}$ k раз, внося каждый раз функцию h под знак дифференциала:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \widehat{L}_{x^{(k)}} h^{(k)}\, dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} \widehat{L}_{x^{(k)}}\, dh^{(k-1)} = \widehat{L}_{x^{(k)}} h^{(k-1)} \Big|_{t_0}^{t_1} - \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt}\widehat{L}_{x^{(k)}}\right) h^{(k-1)}\, dt = \dots = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left((-1)^k \frac{d^k}{dt^k}\widehat{L}_{x^{(k)}}\right) h\, dt.$$

Свободные члены интегрирования по частям равны нулю, поскольку $h \in C_0^n([t_0, t_1])$ и, значит, $h^{(k)}(t_0) = h^{(k)}(t_1) = 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Тогда соотношение (1) перепишется в виде

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \widehat{L}_{x^{(k)}} \right) h\, dt = 0 \quad \forall\, h \in C_0^n([t_0, t_1]). \qquad (2)$$

По лемме Лагранжа п. 1.2 из (2) вытекает уравнение Эйлера—Пуассона. ■

5.3. Пример

$$I(x(\cdot)) = \int\limits_0^1 \ddot{x}^2\, dt \to \mathrm{extr}; \quad x(0) = \dot{x}(0) = x(1) = 0, \quad \dot{x}(1) = 1.$$

Решение. Интегрант: $L = \ddot{x}^2$.
Необходимое условие — уравнение Эйлера—Пуассона

$$\frac{d^2}{dt^2} L_{\ddot{x}} - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}} + L_x = 0 \iff x^{(4)} = 0.$$

Общее решение уравнения Эйлера—Пуассона: $x = C_1 t^3 + C_2 t^2 + C_3 t + C_4$. Неизвестные константы C_1, C_2, C_3, C_4 находим из условий на концах

$x(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$; $\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$;

$$\begin{cases} x(1) = 0, \\ \dot{x}(1) = 1, \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ 3C_1 + 2C_2 = 1, \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = -1. \end{cases}$$

Таким образом, единственная допустимая экстремаль $\hat{x} = t^3 - t^2$.

Покажем с помощью непосредственной проверки, что функция $\hat{x}$ доставляет абсолютный минимум в задаче. Возьмем функцию $h \in C^2([0, 1])$ такую, чтобы функция $\hat{x} + h$ была допустимой. Для этого надо взять функцию h, для которой $h(0) = h(1) = \dot{h}(0) = \dot{h}(1) = 0$. Тогда

$$I(\hat{x}+h) - I(\hat{x}) = \int\limits_0^1 (\ddot{\hat{x}}+\ddot{h})^2\, dt - \int\limits_0^1 \ddot{\hat{x}}^2\, dt = 2\int\limits_0^1 \ddot{\hat{x}}\ddot{h}\, dt + \int\limits_0^1 \ddot{h}^2\, dt \geqslant 2\int\limits_0^1 \ddot{\hat{x}}\ddot{h}\, dt.$$

Интегрируя по частям с учетом условий на h, получим

$$I(\hat{x}+h) - I(\hat{x}) \geqslant 2\int\limits_0^1 \ddot{\hat{x}}\, d\dot{h} = 2\ddot{\hat{x}}\dot{h}\Big|_0^1 - 2\int\limits_0^1 \hat{x}^{(3)}\dot{h}\, dt =$$

$$= -2\int\limits_0^1 \hat{x}^{(3)} dh = -2\hat{x}^{(3)} h\Big|_0^1 + 2\int\limits_0^1 \hat{x}^{(4)} h\, dt = 0.$$

Таким образом, разность всегда неотрицательна, то есть имеем абсолютный минимум

$$S_{\min} = \int\limits_0^1 \ddot{\hat{x}}^2\, dt = \int\limits_0^1 (6t-2)^2\, dt = \int\limits_0^1 (36t^2 - 24t + 4)\, dt = 12t^3 - 12t^2 + 4t\Big|_0^1 = 4.$$

Очевидно, что $S_{\max} = +\infty$. Действительно, возьмем последовательность допустимых функций $x_n(t) = \hat{x}(t) + nt^2(t-1)^2$, тогда $I(x_n(\cdot)) \to +\infty$ при $n \to \infty$.

5.4. Задачи со старшими производными

5.1. $\displaystyle\int_0^1 \ddot x^2\,dt \to \text{extr};\quad x(0)=\dot x(0)=\dot x(1)=0,\quad x(1)=1.$

5.2. $\displaystyle\int_0^1 (\ddot x^2-48x)\,dt \to \text{extr};\quad x(0)=1,\quad \dot x(0)=-4,\quad x(1)=\dot x(1)=0.$

5.3. $\displaystyle\int_0^1 (\ddot x^2-24tx)\,dt \to \text{extr};\quad x(0)=\dot x(0)=0,\quad x(1)=\frac15,\quad \dot x(1)=1.$

5.4. $\displaystyle\int_0^\pi (\ddot x^2-x^2)\,dt \to \text{extr};\quad x(0)=0,\quad \dot x(0)=1,$
$x(\pi)=\operatorname{sh}\pi,\quad \dot x(\pi)=\operatorname{ch}\pi.$

5.5. $\displaystyle\int_0^\pi (\ddot x^2+4x^2)\,dt \to \text{extr};\quad x(0)=-1,\quad \dot x(0)=0,$
$x(\pi)=\operatorname{ch}\pi,\quad \dot x(\pi)=\operatorname{sh}\pi.$

5.6. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\ddot x^2-\dot x^2)\,dt \to \text{extr};\quad x(0)=\dot x(0)=1,\quad x\Bigl(\frac{\pi}{2}\Bigr)=\frac{\pi}{2},\quad \dot x\Bigl(\frac{\pi}{2}\Bigr)=0.$

5.7. $\displaystyle\int_0^1 (\ddot x^2+\dot x^2)\,dt \to \text{extr};\quad x(0)=1,\quad \dot x(0)=0,$
$x(1)=\operatorname{ch}1,\quad \dot x(1)=\operatorname{sh}1.$

5.8. $\displaystyle\int_0^1 e^{-t}\ddot x^2\,dt \to \text{extr};\quad x(0)=0,\quad \dot x(0)=1,\quad x(1)=e,\quad \dot x(1)=2e.$

5.9. $\displaystyle\int_1^e (t+1)t\ddot x^2\,dt \to \text{extr};\quad x(1)=0,\quad \dot x(1)=1,\quad x(e)=e,\quad \dot x(e)=2.$

5.10. $\displaystyle\int_0^1 (x^{(3)})^2\,dt \to \text{extr};\quad x(0)=\dot x(0)=\ddot x(0)=0,$
$x(1)=1,\quad \dot x(1)=3,\quad \ddot x(1)=6.$

5.11. $\displaystyle\int_0^1 \bigl((x^{(3)})^2+\ddot x^2\bigr)\,dt \to \text{extr};\quad x(0)=\ddot x(0)=0,\quad \dot x(0)=1.$
$\dot x(1)=\operatorname{ch}1,\quad x(1)=\ddot x(1)=\operatorname{sh}1.$

§ 6. Задача Лагранжа

Все задачи, изученные нами в предыдущих пунктах, являются частными случаями или могут быть сведены к задаче (мы сформулируем ее чуть позже), поставленной Лагранжем в сочинении «Аналитическая механика» в 1788 году. Для ее решения Лагранж использовал метод неопределенных множителей, который впоследствии стали называть методом множителей Лагранжа. Впрочем этот метод не был им аккуратно обоснован, и понадобилось более ста лет для того, чтобы придать рассуждениям Лагранжа вид строго доказанной теоремы.

6.1. Постановка задачи

Задачей Лагранжа называется следующая экстремальная задача

$$\begin{aligned}&B_0(\xi)\to\min;\quad B_i(\xi)\leqslant 0,\quad i=1,\dots,m',\\ &B_i(\xi)=0,\quad i=m'+1,\dots,m, && (P)\\ &\dot x_\alpha(t)-\varphi(t,x(t))=0\quad \forall\, t\in\Delta, && (1)\end{aligned}$$

где $\xi=(x(\cdot),t_0,t_1)$, $x(\cdot)\in C^1(\Delta,\mathbf{R}^n)$, $t_0,t_1\in\Delta$, $t_0<t_1$, Δ — заданный конечный отрезок,

$$B_i(\xi)=\int_{t_0}^{t_1} f_i\bigl(t,x(t),\dot x(t)\bigr)\,dt+\psi_i\bigl(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1)\bigr),\quad i=0,1,\dots,m.$$

Условие (1), называемое *дифференциальной связью*, может быть наложено не на все координаты вектор-функции $x(\cdot)=\bigl(x_1(\cdot),\dots,x_n(\cdot)\bigr)$, а только на некоторые, для определенности на первые k координат: $\dot x_i(t)-\varphi_i\bigl(t,x(t)\bigr)=0$, $i=1,\dots,k$. Обозначим далее $x=(x_\alpha,x_\beta)$, где $x_\alpha=(x_1,\dots,x_k)$, $x_\beta=(x_{k+1},\dots,x_n)$. Если дифференциальная связь отсутствует, то $k=0$ и $x=x_\beta$.

Поскольку вместо $\dot x_\alpha$ в функции $f_i(t,x,\dot x)$ можно подставить из (1) равное ему выражение $\varphi(t,x)$, то в дальнейшем считаем, что $f_i=f_i(t,x,\dot x_\beta)$.

Частным случаем задачи (P) является задача, в которой один из концов t_0 или t_1 — подвижный, а другой закреплен или оба конца отрезка интегрирования $[t_0,t_1]$ фиксированы.

Элемент ξ, для которого выполнены все указанные условия и ограничения задачи, называется *допустимым*.

Определение. Говорим, что допустимый элемент $\widehat\xi=(\hat x(\cdot),\hat t_0,\hat t_1)$ доставляет *слабый локальный минимум* в задаче Лагранжа (P), и пишем $\widehat\xi\in\operatorname{wlocmin}P$, если существует $\delta>0$ такое, что $B_0(\xi)\geqslant B_0(\widehat\xi)$ для любого допустимого элемента $\xi=(x(\cdot),t_0,t_1)$, для которого $\|\xi-\widehat\xi\|_{C^1(\Delta)\times\mathbf{R}^2}<\delta\Leftrightarrow \|x(\cdot)-\hat x(\cdot)\|_{C^1(\Delta)}<\delta$, $|t_0-\hat t_0|<\delta$, $|t_1-\hat t_1|<\delta$.

6.2. Необходимые условия экстремума

Теорема Эйлера—Лагранжа. *Пусть элемент* $\widehat{\xi} = (\hat{x}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ *доставляет слабый локальный минимум в задаче Лагранжа* (P) $(\widehat{\xi} \in \operatorname{wlocmin} P)$, *функции* $f_i, f_{ix}, f_{i\dot{x}}$ *непрерывны в некоторой окрестности расширенного графика* $\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}} := \{(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \mid t \in \Delta\}$ $\big(f_i, f_{ix}, f_{i\dot{x}} \in C(\mathcal{O}(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}}))\big)$, $i = 0, 1, \ldots, m$, *функции* φ, φ_x *непрерывны в некоторой окрестности графика* $\Gamma_{\hat{x}} := \{(t, \hat{x}(t)) \mid t \in \Delta\}$ $\big(\varphi, \varphi_x \in C(\mathcal{O}(\Gamma_{\hat{x}}))\big)$, *функции* ψ_i *непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки* $(\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), \hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1))$ $\big(\psi_i \in C^1(\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), \hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1))\big)$, $i = 0, 1, \ldots, m$ (условие гладкости).

Тогда найдутся множители Лагранжа $(\lambda, p) \in \mathbb{R}^{m+1} \times C^1(\Delta, \mathbb{R}^k)$, $(\lambda, p(\cdot)) \neq 0$, *такие, что для функции Лагранжа*

$$\Lambda = \int_{t_0}^{t_1} \big(f(t, x, \dot{x}_\beta) + p(t)(\dot{x}_\alpha - \varphi(t, x))\big)\,dt + l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)),$$

где $f(t, x, \dot{x}_\beta) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x, \dot{x}_\beta)$, $l = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))$ *— терминант, выполнены условия:*

a) *стационарности по* $x(\cdot)$ *— уравнение Эйлера для лагранжиана* $L(t, x, \dot{x}) = f(t, x, \dot{x}_\beta) + p(\dot{x}_\alpha - \varphi(t, x))$

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}(t) + \widehat{L}_x(t) = 0 \quad \forall\, t \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} -\dot{p}(t) - p(t)\widehat{\varphi}_{x_\alpha}(t) + \hat{f}_{x_\alpha}(t) = 0, \\ -\dfrac{d}{dt}\hat{f}_{\dot{x}_\beta}(t) - p(t)\widehat{\varphi}_{x_\beta}(t) + \hat{f}_{x_\beta}(t) = 0; \end{cases}$$

b) *трансверсальности по* x

$$\widehat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x(t_0)} \iff \begin{cases} p(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x_\alpha(t_0)}, \\ \hat{f}_{\dot{x}_\beta}(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x_\beta(t_0)}; \end{cases}$$

$$\widehat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x(t_1)} \iff \begin{cases} p(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x_\alpha(t_1)}, \\ \hat{f}_{\dot{x}_\beta}(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x_\beta(t_1)}; \end{cases}$$

c) *стационарности по подвижным концам* (выписывается только для подвижных концов отрезка интегрирования)

$$\widehat{\Lambda}_{t_0}(\hat{t}_0) = 0 \iff -\hat{f}(\hat{t}_0) + \hat{l}_{t_0} + \hat{l}_{x(t_0)}\dot{\hat{x}}(\hat{t}_0) = 0,$$

$$\widehat{\Lambda}_{t_1}(\hat{t}_1) = 0 \iff \hat{f}(\hat{t}_1) + \hat{l}_{t_1} + \hat{l}_{x(t_1)}\dot{\hat{x}}(\hat{t}_1) = 0;$$

d) *дополняющей нежесткости*

$$\lambda_i B_i(\widehat{\xi}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m';$$

e) *неотрицательности*

$$\lambda_i \geqslant 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m'.$$

Доказательство теоремы основано на правиле множителей Лагранжа для гладких задач с ограничениями типа равенств и неравенств в нормированных пространствах (глава 1, п. 8.2). Покажем, что все условия теоремы о правиле множителей Лагранжа выполняются.

Поскольку равенство $B_i = 0$ можно заменить двумя неравенствами $B_i \leqslant 0$, $-B_i \leqslant 0$, то в дальнейшем для простоты записи считаем, что у нас имеются только ограничения типа неравенств и $m' = m$. Пусть $X = C^1(\Delta, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^2$, $Y = C(\Delta, \mathbb{R}^k)$. Это банаховы пространства — условие банаховости выполняется.

Из непрерывной дифференцируемости функций в теореме Эйлера—Лагранжа следует, что функционалы $B_i: X \to \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, и отображение $F: X \to Y$,

$$F(x(\cdot), t_0, t_1) = \dot{x}_\alpha(t) - \varphi(t, x(t)),$$

строго дифференцируемы в точке $\widehat{\xi}$ — условие гладкости выполняется.

Ослабленное условие регулярности — условие замкнутости образа оператора $F'(\widehat{\xi})$ выполняется, так как $\operatorname{Im} F'(\widehat{\xi}) = Y = C(\Delta, \mathbb{R}^k)$ — замкнутое пространство. Действительно,

$$F'(\widehat{\xi})[h(\cdot), \tau_0, \tau_1] = \dot{h}(t) - \widehat{\varphi}_{x_\alpha}(t)h(t),$$

а система линейных дифференциальных уравнений с непрерывными коэффициентами

$$\dot{h}(t) - \widehat{\varphi}_{x_\alpha}(t)h(t) = y(t) \tag{1}$$

имеет решение для любого $y(\cdot) \in C(\Delta, \mathbb{R}^k)$, определенное на всем отрезке Δ, с любым граничным условием в форме Коши $h(\hat{t}_0) = \gamma$.

Все условия теоремы главы 1 п. 8.2 выполняются. Согласно этой теореме существуют вектор $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ и функционал $y^* \in Y^*$ не равные одновременно нулю и такие, что для функции Лагранжа

$$\widetilde{\Lambda}(\xi) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i B_i(\xi) + \langle y^*, F(\xi)\rangle = \widetilde{\Lambda}(x(\cdot), t_0, t_1) =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, \dot{x}_\beta)\,dt + \langle y^*, \dot{x}_\alpha(t) - \varphi(t, x(t))\rangle + l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))$$

выполняются условия: a$'$) стационарности $\widehat{\widetilde{\Lambda}}_\xi = 0 \iff \widehat{\widetilde{\Lambda}}_x = 0$ $(\Leftrightarrow \widehat{\widetilde{\Lambda}}_{x_\alpha} = 0,\ \widehat{\widetilde{\Lambda}}_{x_\beta} = 0)$, $\widehat{\widetilde{\Lambda}}_{t_0} = 0$, $\widehat{\widetilde{\Lambda}}_{t_1} = 0$;

b$'$) дополняющей нежесткости: $\lambda_i B_i(\widehat{\xi}) = 0$, $i = 1, \ldots, m$;

c$'$) неотрицательности: $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 0, 1, \ldots, m$.

Покажем, что из уравнения $\widehat{\widetilde{\Lambda}}_{x_\alpha} = 0$ следует существование функции $p \in C^1(\Delta, \mathbb{R}^k)$ такой, что $\langle y^*, y(\cdot)\rangle = \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} p(t)y(t)\,dt$ $\forall\, y \in C(\Delta, \mathbb{R}^k)$ и для которой выполняются условия a)–b) теоремы Эйлера—Лагранжа. Тогда

$\widetilde{\Lambda} = \Lambda$ и теорема будет доказана. Уравнения Эйлера и условия трансверсальности по x_β будут вытекать из условия стационарности функции Лагранжа Λ по x_β. Они выводятся как и для задачи Больца.

Распишем условие стационарности $\widetilde{\Lambda}$ по x_α:

$$\widehat{\widetilde{\Lambda}}_{x_\alpha} = 0 \iff \widehat{\widetilde{\Lambda}}_{x_\alpha}[h] = 0 \quad \forall\, h \in C^1(\Delta, \mathbf{R}^k) \iff$$

$$\int_{\hat t_0}^{\hat t_1} \hat f_{x_\alpha}(t)h(t)\,dt + \hat l_{x_\alpha(t_0)}h(\hat t_0) + \hat l_{x_\alpha(t_1)}h(\hat t_1) + \langle y^*, \dot h(t) - \widehat{\varphi}_{x_\alpha}(t)h(t)\rangle = 0.$$

Отсюда в силу соотношения (1)

$$\langle y^*, y(\cdot)\rangle = -\int_{\hat t_0}^{\hat t_1} \hat f_{x_\alpha} h\,dt - \hat l_{x_\alpha(t_0)}\gamma - \hat l_{x_\alpha(t_1)}h(\hat t_1)\ \forall\, y \in C(\Delta),\ \forall\, \gamma \in \mathbf{R}^k. \quad (2)$$

Определим функцию p из условий:

$$-\dot p(t) - p(t)\widehat{\varphi}_{x_\alpha}(t) + \hat f_{x_\alpha}(t) = 0, \quad p(\hat t_1) = -\hat l_{x_\alpha(t_1)}. \quad (3)$$

По теореме существования и единственности решения задачи Коши для линейной неоднородной системы [АТФ, с. 191] функция $p \in C^1(\Delta, \mathbf{R}^k)$ определяется нашими условиями однозначно. Тогда в силу (1) и (3):

$$\int_{\hat t_0}^{\hat t_1} \frac{d}{dt}(ph)\,dt = p(\hat t_1)h(\hat t_1) - p(\hat t_0)h(\hat t_0) = \int_{\hat t_0}^{\hat t_1} (\dot p h + p\dot h)\,dt =$$

$$= \int_{\hat t_0}^{\hat t_1} \left(\hat f_{x_\alpha} h - p\widehat{\varphi}_{x_\alpha} h + py + p\widehat{\varphi}_{x_\alpha} h\right) dt = \int_{\hat t_0}^{\hat t_1} \left(\hat f_{x_\alpha} h + py\right) dt.$$

Находя отсюда $\int_{\hat t_0}^{\hat t_1} \hat f_{x_\alpha} h\,dt$ и подставляя в (2), получим

$$\langle y^*, y(\cdot)\rangle = \int_{\hat t_0}^{\hat t_1} py\,dt - p(\hat t_1)h(\hat t_1) + p(\hat t_0)h(\hat t_0) - \hat l_{x_\alpha(t_0)}\gamma - \hat l_{x_\alpha(t_1)}h(\hat t_1) \overset{(3)}{=}$$

$$\overset{(3)}{=} \int_{\hat t_0}^{\hat t_1} py\,dt + \gamma\left(p(\hat t_0) - \hat l_{x_\alpha(t_0)}\right) \quad \forall\, y \in C(\Delta, \mathbf{R}^k),\ \forall\, \gamma \in \mathbf{R}^k.$$

Откуда $\langle y^*, y(\cdot)\rangle = \int_{\hat t_0}^{\hat t_1} p(t)y(t)\,dt$, $p(\hat t_0) = \hat l_{x_\alpha(t_0)}$. Таким образом, $\widetilde{\Lambda} = \Lambda$. ■

6.3. Примеры

Пример 1. $I(x(\cdot)) = \int_0^1 \dot x^2\,dt \to \mathrm{extr}$; $\int_0^1 x\,dt = 0$, $x(1) = 1$.

Решение. Функция Лагранжа: $\Lambda = \int_0^1 (\lambda_0 \dot x^2 + \lambda_1 x)\,dt + \lambda_2(x(1) - 1)$.

Необходимые условия:

a) уравнение Эйлера для лагранжиана $L = \lambda_0\dot x^2 + \lambda_1 x$

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot x} + L_x = 0 \iff -2\lambda_0\ddot x + \lambda_1 = 0;$$

b) трансверсальность по x для терминанта $l = \lambda_2(x(1) - 1)$

$$L_{\dot x}(0) = l_{x(0)}, \quad L_{\dot x}(1) = -l_{x(1)} \iff 2\lambda_0\dot x(0) = 0, \quad 2\lambda_0\dot x(1) = -\lambda_2;$$

Если $\lambda_0 = 0$, то из a) $\lambda_1 = 0$, а из b) $\lambda_2 = 0$ — все множители Лагранжа — нули. Этого не может быть. Положим $\lambda_0 = \frac{1}{2}$. Тогда $\ddot x = \lambda_1$. Общее решение: $x = C_1t^2 + C_2t + C_3$. Неизвестные константы C_1, C_2, C_3 находим из условия трансверсальности $\dot x(0) = 0$, из условия на конце в единице и из изопериметрического условия:

$\dot x(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$,

$$\begin{cases} x(1) = 1, \\ \int_0^1 x\,dt = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 + C_3 = 1, \\ \dfrac{C_1}{3} + C_3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = \frac{3}{2}$, $C_3 = -\frac{1}{2}$. Таким образом, в задаче имеется единственная допустимая экстремаль $\hat x = \frac{3t^2 - 1}{2}$.

Покажем с помощью непосредственной проверки, что функция $\hat x$ доставляет абсолютный минимум в задаче. Возьмем функцию $h \in C^1([0, 1])$ такую, чтобы $\hat x + h$ была допустимой функцией. Для этого надо взять функцию h, для которой $h(1) = 0$ и $\int_0^1 h\,dt = 0$. Тогда

$$I(\hat x + h) - I(\hat x) = \int_0^1 (\dot{\hat x} + \dot h)^2\,dt - \int_0^1 \dot{\hat x}^2\,dt = 2\int_0^1 \dot{\hat x}\dot h\,dt + \int_0^1 \dot h^2\,dt \geqslant 2\int_0^1 \dot{\hat x}\dot h\,dt.$$

Интегрируя по частям с учетом условий на h и условия трансверсальности $\dot{\hat x}(0) = 0$, получим

$$I(\hat x + h) - I(\hat x) \geqslant 2\int_0^1 \dot{\hat x}\,dh = 2\dot{\hat x}h\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \ddot{\hat x}h\,dt = -6\int_0^1 h\,dt = 0.$$

Таким образом, разность всегда неотрицательна, то есть имеем абсолютный минимум.

Очевидно, что $S_{\max} = +\infty$. Действительно, возьмем последовательность допустимых функций $x_n(t) = \hat{x}(t) + n\sin 2\pi t$, тогда $I\big(x_n(\cdot)\big) \to +\infty$ при $n \to \infty$.

Пример 2.

$$\int_0^1 \ddot{x}^2\,dt \to \text{extr};\quad x(0) = \dot{x}(0) = 0,\quad x(1) = 1.$$

Решение. Эту задачу можно свести к задаче Лагранжа, вводя вместо функции x вектор-функцию (x_1, x_2), и обозначения: $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$. Тогда исходная задача сведется к задаче Лагранжа:

$$\int_0^1 \dot{x}_2^2\,dt \to \text{extr};\quad \dot{x}_1 = x_2,\quad x_1(0) = 0,\quad x_2(0) = 0,\quad x_1(1) = 1.$$

Функция Лагранжа:

$$\Lambda = \int_0^1 \big(\lambda_0\dot{x}_2^2 + p(t)(\dot{x}_1 - x_2)\big)\,dt + \lambda_1 x_1(0) + \lambda_2 x_2(0) + \lambda_3\big(x_1(1) - 1\big).$$

Необходимые условия:

a) система уравнений Эйлера для лагранжиана $L = \lambda_0\dot{x}_2^2 + p(\dot{x}_1 - x_2)$

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}_1} + L_{x_1} = 0 \iff -\dot{p} = 0,$$

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}_2} + L_{x_2} = 0 \iff -2\lambda_0\ddot{x}_2 - p = 0;$$

b) трансверсальность по x для терминанта $l = \lambda_1 x_1(0) + \lambda_2 x_2(0) + \lambda_3\big(x_1(1) - 1\big)$

$$L_{\dot{x}_1}(0) = l_{x_1(0)},\ L_{\dot{x}_1}(1) = -l_{x_1(1)} \iff p(0) = \lambda_1,\quad p(1) = -\lambda_3,$$

$$L_{\dot{x}_2}(0) = l_{x_2(0)},\ L_{\dot{x}_2}(1) = -l_{x_2(1)} \iff 2\lambda_0\dot{x}_2(0) = \lambda_2,\quad 2\lambda_0\dot{x}_2(1) = 0;$$

c) неотрицательность

$$\lambda_0 \geqslant 0.$$

Если $\lambda_0 = 0$, то из a) следует, что $p = 0$, а из b) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ — все множители Лагранжа — нули. Этого не может быть. Положим $\lambda_0 = \frac{1}{2}$. Тогда из a) $x_2^{(3)} = 0 \Leftrightarrow x^{(4)} = 0$. Общее решение:

$x = C_1t^3 + C_2t^2 + C_3t + C_4$. Неизвестные константы C_1, C_2, C_3, C_4 находим из условия трансверсальности $\dot{x}_2(1) = 0 \Leftrightarrow \ddot{x}(1) = 0$ и из условий на концах:

$$x(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0,$$
$$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0,$$

$$\begin{cases} x(1) = 1, \\ \ddot{x}(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ 6C_1 + 2C_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = -\frac{1}{2}, \\ C_2 = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Таким образом, в задаче имеется единственная допустимая экстремаль $\hat{x} = -\frac{t^3}{2} + 3\frac{t^2}{2}$.

Покажем с помощью непосредственной проверки, что функция $\hat{x}$ доставляет абсолютный минимум в задаче. Возьмем функцию $h \in C^2([0,1])$ такую, чтобы $\hat{x} + h$ была допустимой функцией. Для этого надо взять функцию h, для которой $h(0) = h(1) = \dot{h}(0) = 0$. Тогда для функционала $I\big(x(\cdot)\big) = \int_0^1 \ddot{x}^2\,dt$ имеем

$$I(\hat{x}+h) - I(\hat{x}) = \int_0^1 (\ddot{\hat{x}} + \ddot{h})^2\,dt - \int_0^1 \ddot{\hat{x}}^2\,dt = 2\int_0^1 \ddot{\hat{x}}\ddot{h}\,dt + \int_0^1 \ddot{h}^2\,dt \geqslant 2\int_0^1 \ddot{\hat{x}}\ddot{h}\,dt.$$

Интегрируя дважды по частям с учетом условий на функцию h и условия трансверсальности $\ddot{x}(1) = 0$, получим

$$I(\hat{x}+h) - I(\hat{x}) \geqslant 2\int_0^1 \ddot{\hat{x}}\,d\dot{h} = 2\ddot{\hat{x}}\dot{h}\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \hat{x}^{(3)}\dot{h}\,dt = -2\hat{x}^{(3)}h\Big|_0^1 + 2\int_0^1 \hat{x}^{(4)}h\,dt = 0.$$

Таким образом разность всегда неотрицательна, то есть имеем абсолютный минимум.

$$S_{\min} = \int_0^1 \ddot{\hat{x}}^2\,dt = \int_0^1 (-3t+3)^2\,dt = 9\int_0^1 (t^2 - 2t + 1)\,dt = 3t^3 - 9t^2 + 9t\Big|_0^1 = 3.$$

Найдем абсолютный максимум в задаче. Возьмем последовательность допустимых функций $x_n(t) = \hat{x}(t) + nt^2(t-1)$; тогда

$$I\big(x_n(\cdot)\big) = \int_0^1 \big(\ddot{\hat{x}}(t) + n(6t-2)\big)^2\,dt \to +\infty \quad \text{при } n \to +\infty,$$

т.е. $S_{\max} = +\infty$.

6.4. Вывод уравнения Эйлера—Пуассона из теоремы Эйлера—Лагранжа

Вернемся к задаче со старшими производными:

$$I(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L\big(t, x(t), \dot x(t), \ddot x(t), \dots, x^{(n)}(t)\big)\, dt \to \text{extr}; \qquad (P)$$

$$x^{(k)}(t_j) = x_{kj}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad j = 0, 1. \qquad (1)$$

Теорема. *Пусть* $\hat x \in \operatorname{wlocextr} P$, *функции* $L, L_x, L_{\dot x}, \dots, L_{x^{(n)}}$ — *непрерывны в некоторой окрестности расширенного графика* $\Gamma_{\hat x \dot{\hat x} \dots \hat x^{(n)}}$. *Тогда* $\widehat L_{x^{(k)}} \in C^k([t_0, t_1])$, $k = 1, \dots, n$, *и выполнено уравнение Эйлера—Пуассона*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \widehat L_{x^{(k)}}(t) = 0 \quad \forall\, t \in [t_0, t_1].$$

Доказательство. Приведем задачу со старшими производными к задаче Лагранжа, сделав замену переменных $x_k = x^{(k-1)}$, $k = 1, \dots, n$,

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot x_n)\, dt \to \text{extr}; \quad \dot x_k = x_{k+1}, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

$$x_k(t_j) = x_{k-1\,j}, \quad k = 1, \dots, n, \quad j = 0, 1. \qquad (P')$$

Здесь переменной является вектор-функция $(x_1, \dots, x_n)$. Поскольку функция $\hat x$ доставляет локальный экстремум в задаче со старшими производными (P), то вектор-функция $(x_1, \dots, x_n)$ доставляет локальный экстремум в задаче Лагранжа (P'). Выпишем согласно теореме Эйлера—Лагранжа необходимые условия стационарности для лагранжиана $\widetilde L = \lambda_0 L(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot x_n) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k(\dot x_k - x_{k+1})$. Терминальную часть функции Лагранжа, а также остальные необходимые условия экстремума, не играющие существенной роли в задаче с закрепленными концами и фиксированным отрезком интегрирования, не выписываем. Система уравнений Эйлера:

$$-\frac{d}{dt}\hat{\widetilde L}_{\dot x_k} + \hat{\widetilde L}_{x_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n \iff \begin{cases} -\dot p_1 + \lambda_0 \widehat L_{x_1} = 0, \\ -\dot p_k + \lambda_0 \widehat L_{x_k} - p_{k-1} = 0, \quad k = 2, \dots, n-1, \\ -\dfrac{d}{dt}\lambda_0 \widehat L_{\dot x_n} + \lambda_0 \widehat L_{x_n} - p_{n-1} = 0. \end{cases}$$

Если $\lambda_0 = 0$, то из системы уравнений Эйлера следует, что $p_{n-1} = \dots = p_1 = 0$. Все множители Лагранжа — нули. Пусть $\lambda_0 \neq 0$. Положим $\lambda_0 = 1$. Выразим p_{n-1} из последнего уравнения и подставим в предпоследнее; проводя эту процедуру для $p_{n-2}, \dots, p_1$, придем в итоге к уравнению Эйлера—Пуассона. ■

6.5. Задачи Лагранжа

6.1. $\int_0^1 \dot x^2\, dt \to \text{extr}; \quad \int_0^1 tx\, dt = 0, \quad x(0) = 1.$

6.2. $\int_0^T \dot x^2\, dt \to \text{extr}; \quad \int_0^T x\, dt = 1, \quad x(0) = 3.$

6.3. $\int_0^T \dot x^2\, dt \to \text{extr}; \quad \int_0^T x\, dt = \frac{1}{3}, \quad x(T) = 1.$

6.4. $\int_0^\pi \dot x^2\, dt \to \text{extr}; \quad \int_0^\pi x \sin t\, dt = 1, \quad x(0) = 0.$

6.5. $\int_0^1 x\, dt \to \text{extr}; \quad \int_0^1 \sqrt{1 + \dot x^2}\, dt = \frac{\pi}{2}, \quad x(1) = 0.$

6.6. $\int_0^1 \ddot x^2\, dt \to \text{extr}; \quad x(0) = \dot x(1) = 0, \quad \dot x(0) = 1.$

6.7. $\int_1^e t^2 \ddot x^2\, dt \to \text{extr}; \quad x(1) = -1, \quad x(e) = \dot x(1) = e.$

6.8. $\int_0^\pi (\ddot x^2 - x^2)\, dt \to \text{extr}; \quad \dot x(0) = \dot x(\pi) = 0, \quad x(\pi) = 1.$

6.9. $\int_0^1 (\ddot x^2 + \dot x^2)\, dt \to \text{extr}; \quad x(0) = 0, \quad x(1) = \operatorname{sh} 1, \quad \dot x(1) = \operatorname{ch} 1.$

6.10. $\int_0^{\pi/2} (\ddot x^2 - \dot x^2)\, dt \to \text{extr}; \quad x(0) = \dot x(0) = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

6.11. $T \to \text{extr}; \quad \int_0^T \ddot x^2\, dt = 1, \quad x(0) = \dot x(0) = 0, \quad \dot x(T) = 1.$

6.12. $\dot x(1) \to \text{extr}; \quad \int_0^1 \ddot x^2\, dt = 4, \quad x(0) = \dot x(0) = x(1) = 0.$

Ответы к задачам главы 3

1.1. $1 - t \in \text{absmin}$; $S_{\min} = 1$; $S_{\max} = +\infty$.

1.2. $-\dfrac{t^2}{4} + \dfrac{t}{4} \in \text{absmin}$; $S_{\max} = +\infty$.

1.3. $\dfrac{t^3 - t}{12} \in \text{absmin}$; $S_{\min} = -\dfrac{1}{180}$; $S_{\max} = +\infty$.

1.4. $\dfrac{t - t^4}{24} \in \text{absmin}$; $S_{\max} = +\infty$.

1.5. $\ln t \in \text{absmin}$; $S_{\min} = 1$; $S_{\max} = +\infty$.

1.6. $\dfrac{\ln(t+1)}{\ln 2} \in \text{absmin}$; $S_{\min} = 1$; $S_{\max} = +\infty$.

1.7. $\dfrac{\ln \frac{3(t-1)}{(t+1)}}{\ln \frac{3}{2}} \in \text{absmin}$; $S_{\max} = +\infty$.

1.8. $\sqrt{t+1} \in \text{absmin}$; $S_{\max} = +\infty$.

1.9. $\dfrac{(t-2)^2}{4} \in \text{strlocmin}$; $S_{\min} = -\infty$; $S_{\max} = +\infty$, $(t-1)^2 \notin \text{locextr}$.

1.10. $2\ln(t+1) \in \text{absmin}$; $S_{\max} = +\infty$.

1.11. $t^3 - t \in \text{absmin}$; $S_{\max} = +\infty$.

1.12. $t^3 \in \text{absmin}$; $S_{\min} = 3$; $S_{\max} = +\infty$.

1.13. $\dfrac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} 1} \in \text{absmin}$; $S_{\max} = +\infty$.

1.14. $(t-1)\operatorname{ch} t \in \text{absmin}$; $S_{\max} = +\infty$.

1.15. $(t-1)\operatorname{sh} t \in \text{absmin}$; $S_{\min} = \dfrac{3 - \operatorname{sh} 2}{4}$; $S_{\max} = +\infty$.

1.16. $\cos t \in \text{absmin}$; $S_{\min} = 0$; $S_{\max} = +\infty$.

1.17. $\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right)\sin t \in \text{absmin}$; $S_{\min} = -\dfrac{\pi}{4}$; $S_{\max} = +\infty$.

1.18. $t\cos t \in \text{absmin}$; $S_{\max} = +\infty$.

1.19. $\sqrt{1 - t^2} \in \text{absmin}$; $S_{\max} = +\infty$.

1.20. $\sqrt{2t - t^2} \in \text{absmin}$; $S_{\max} = +\infty$.

1.21. Допустимые экстремали — цепные линии вида $C \operatorname{ch} \frac{t}{C}$, где константа C отыскивается из условия на конце $C \operatorname{ch} \frac{T_0}{C} = \xi$. Причем при $\frac{\xi}{T_0} > \alpha$ имеются две допустимые экстремали, при $\frac{\xi}{T_0} = \alpha$ имеется одна допустимая экстремаль, при $\frac{\xi}{T_0} < \alpha$ допустимых экстремалей нет, где α определяется из системы уравнений $\alpha = \operatorname{sh}\tau$, $\tau = \operatorname{cth}\tau$, $S_{\max} = +\infty$. Подробное исследование задачи содержится в книге [ИТ, с. 427].

1.22. Экстремаль записывается в параметрической форме следующим

образом: $x = \frac{a^2}{2}(1 - \cos\tau)$, $t = \frac{a^2}{2}(\tau - \sin\tau) + c$. Константы a и c однозначно отыскиваются из начальных условий. Допустимая экстремаль доставляет absmin , $S_{\max} = +\infty$. Исследование задачи содержится в книге [АТФ, с. 113].

1.23. Экстремали, удовлетворяющие начальному условию $x(0) = 0$, имеют вид $x(t, C) = Ct + \frac{1+C^2}{4h}t^2$. Константа C отыскивается из граничного условия $x(T_0) = \xi$. Уравнение огибающей этого семейства имеет вид $x = \frac{t^2}{4h} - h$ (в баллистике эта кривая носит наименование *кривой безопасности*). Причем при $\xi > \frac{T_0^2}{4h} - h$ имеются две допустимые экстремали, при $\xi = \frac{T_0^2}{4h} - h$ имеется одна допустимая экстремаль, при $\xi < \frac{T_0^2}{4h} - h$ допустимых экстремалей нет. В случае двух экстремалей верхняя (в осях $t, -x$), носящая название *навесной*, не дает локального экстремума, нижняя (*настильная*) дает сильный минимум. $S_{\max} = +\infty$.

2.1. $-\frac{t^2+3}{4} \notin \text{locextr}$; $S_{\min} = -\infty$ $(x_n(t) \equiv n)$; $S_{\max} = +\infty$.

2.2. $\operatorname{ch} t \in \text{absmin}$; $S_{\max} = +\infty$.

2.3. $e^t + \sin t \in \text{absmin}$; $S_{\max} = +\infty$.

2.4. $\sin t + \cos t \notin \text{locextr}$; $S_{\min} = -\infty$ $(x_n(t) \equiv n)$; $S_{\max} = +\infty$.

2.5. $\cos t - 1 \notin \text{locextr}$; $S_{\min} = -\infty$ $(x_n(t) \equiv n)$; $S_{\max} = +\infty$.

2.6. $(0,0) \notin \text{locextr}$; $S_{\min} = -\infty$ $(x_n(t) = (n, -n))$; $S_{\max} = +\infty$ $(x_n(t) = (n, n))$.

2.7. $\ln(t+1) - 1 \in \text{absmin}$; $S_{\max} = +\infty$.

2.8. $\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \in \text{absmin}$; $S_{\max} = +\infty$.

2.9. $\ln t + 1 \in \text{absmin}$; $S_{\max} = +\infty$.

2.10. Допустимые экстремали: $\sqrt{t+1}$, $\sqrt[6]{\frac{4t^3}{3}}$; $S_{\max} = +\infty$.

2.11. $2\ln(t+1) \in \text{absmin}$; $S_{\max} = +\infty$.

2.12. $-\frac{e^t}{e^3+1} \in \text{absmin}$; $S_{\max} = +\infty$.

3.1. $0 \notin \text{locextr}$; $S_{\min} = -\infty$ $(x_n(t) = nt)$; $S_{\max} = +\infty$.

3.2. $\frac{t^2-1}{4} \in \text{absmin}$; $S_{\max} = +\infty$.

3.3. $(\hat{x} = -2t, \widehat{T} = 1) \in \text{absmin}$; $S_{\min} = 4$; $S_{\max} = +\infty$.

3.4. $\left(\hat{x} = \pm 4t, \widehat{T} = \frac{1}{2}\right) \in \text{absmin}$; $S_{\min} = 8$; $S_{\max} = +\infty$.

3.5. $(\hat{x} = 0, \widehat{T} = 1) \notin \text{locextr}$; $S_{\min} = -\infty$; $S_{\max} = +\infty$.

3.6. $\left(\hat{x} = \frac{t^2}{4} - t + 1, \widehat{T} = 2\right) \notin \text{locextr}$, $S_{\min} = -\infty$ $(x_n(t) = 1 - t, T_n = n)$, $S_{\max} = +\infty$.

3.7. $\sin t + \cos t \in \text{absmin}$; $S_{\max} = +\infty$.

3.8. $\left(t - \frac{\pi}{4} - 1\right)\sin t \in \mathrm{absmin}$; $S_{\max} = +\infty$.

3.9. $e^t \in \mathrm{absmin}$; $S_{\max} = +\infty$.

3.10. $\hat{x} = 2\,\mathrm{sh}\,\widehat{T}\,\mathrm{ch}\,t$, где $\widehat{T}$ единственное решение уравнения $\mathrm{sh}\,2\widehat{T} + \widehat{T} = 1$.

3.11. $\sqrt{1 + 2t - t^2} \in \mathrm{absmin}$; $S_{\max} = +\infty$.

3.12. $\hat{x} = \sqrt{1 + 2t - t^2}$, $\widehat{T} = 2$; $S_{\max} = +\infty$.

3.13. Допустимые экстремали — цепные линии вида $C\,\mathrm{ch}\,\frac{t}{C}$, где константа C отыскивается из условия на конце $C\,\mathrm{ch}\,\frac{T_0}{C} = \xi$. Причем при $\frac{\xi}{T_0} > \alpha$ имеются две допустимые экстремали, при $\frac{\xi}{T_0} = \alpha$ имеется одна допустимая экстремаль, при $\frac{\xi}{T_0} < \alpha$ допустимых экстремалей нет, где α определяется из системы уравнений $\alpha = \mathrm{sh}\,\tau$, $\tau = \mathrm{cth}\,\tau$; $S_{\max} = +\infty$.

4.1. $3t^2 - 4t + 1 \in \mathrm{absmin}$; $S_{\min} = 4$; $S_{\max} = +\infty$.

4.2. $\frac{5t^3 - 3t}{2} \in \mathrm{absmin}$; $S_{\min} = 6$; $S_{\max} = +\infty$.

4.3. $60t^3 - 96t^2 + 36t \in \mathrm{absmin}$; $S_{\min} = 192$; $S_{\max} = +\infty$.

4.4. $\cos t \in \mathrm{absmin}$; $S_{\min} = \frac{\pi}{2}$; $S_{\max} = +\infty$.

4.5. $\frac{t - 2\sin t}{\pi} \in \mathrm{absmin}$; $S_{\max} = +\infty$.

4.6. $2e^{1-t} - t + 1 \in \mathrm{absmin}$; $S_{\min} = 2e^2 + 2e - 3$; $S_{\max} = +\infty$.

4.7. $te^t \in \mathrm{absmin}$; $S_{\max} = +\infty$.

4.8. $t \in \mathrm{absmin}$; $S_{\min} = \frac{7}{3}$; $S_{\max} = +\infty$.

4.9. $\pm\sqrt{2}\sin k\pi t$, $k \in \mathbf{N}$; $\pm\sqrt{2}\sin \pi t \in \mathrm{absmin}$; $S_{\min} = \pi^2$; $S_{\max} = +\infty$.

4.10. $\frac{8}{\pi} t \cos t$; $S_{\max} = +\infty$.

4.11. Допустимые экстремали — цепные линии вида $\pm C\left(\mathrm{ch}\,\frac{t}{C} - \mathrm{ch}\,\frac{T_0}{C}\right)$, где константа $C > 0$ отыскивается из условия $2C\,\mathrm{sh}\,\frac{T_0}{C} = l$. Причем при $l > 2T_0$ имеются две допустимые экстремали, при $l = 2T_0$ имеется одна допустимая экстремаль $\hat{x} \equiv 0$, при $l < 2T_0$ допустимых экстремалей нет, $S_{\max} = +\infty$.

4.12. $(3t^2 - 2t, 3t^2 - 6t), (-3t^2 + 4t, -3t^2) \notin \mathrm{locextr}$, $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.

5.1. $-2t^3 + 3t^2 \in \mathrm{absmin}$; $S_{\min} = 132$; $S_{\max} = +\infty$.

5.2. $t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 \in \mathrm{absmin}$; $S_{\max} = +\infty$.

5.3. $\frac{t^5 + 3t^3 - 2t^2}{10} \in \mathrm{absmin}$; $S_{\max} = +\infty$.

5.4. $\mathrm{sh}\,t \in \mathrm{absmin}$; $S_{\max} = +\infty$.

5.5. $-\mathrm{ch}\,t \cos t \in \mathrm{absmin}$; $S_{\max} = +\infty$.

5.6. $t + \cos t \in \mathrm{absmin}$; $S_{\max} = +\infty$.

5.7. $\mathrm{ch}\,t \in \mathrm{absmin}$; $S_{\max} = +\infty$.

5.8. $te^t \in \mathrm{absmin}$; $S_{\max} = +\infty$.

5.9. $t\ln t \in \mathrm{absmin}$; $S_{\min} = e$; $S_{\max} = +\infty$.

5.10. $t^3 \in \mathrm{absmin}$; $S_{\min} = 36$; $S_{\max} = +\infty$.

5.11. $\mathrm{sh}\,t \in \mathrm{absmin}$; $S_{\min} = \frac{\mathrm{sh}\,2}{2}$; $S_{\max} = +\infty$.

6.1. $\frac{5t^3 - 15t + 8}{8} \in \mathrm{absmin}$; $S_{\max} = +\infty$.

6.2. $\left(\hat{x} = 3, \widehat{T} = \frac{1}{3}\right) \in \mathrm{absmin}$; $S_{\min} = 0$, $(\hat{x} = 3t^2 - 6t + 3, \widehat{T} = 1) \notin \mathrm{locextr}$; $S_{\max} = +\infty$.

6.3. $\left(\hat{x} = 1, \widehat{T} = \frac{1}{3}\right) \in \mathrm{absmin}$; $S_{\min} = 0$, $(\hat{x} = t^2, \widehat{T} = 1) \notin \mathrm{locextr}$; $S_{\max} = +\infty$.

6.4. $\frac{2}{3\pi}(t + \sin t) \in \mathrm{absmin}$; $S_{\max} = +\infty$.

6.5. $-\sqrt{1 - t^2} \in \mathrm{absmin}$; $S_{\min} = -\frac{\pi}{4}$, $\sqrt{1 - t^2} \in \mathrm{absmax}$; $S_{\max} = \frac{\pi}{4}$.

6.6. $-\frac{t^2}{2} + t \in \mathrm{absmin}$; $S_{\min} = 1$; $S_{\max} = +\infty$.

6.7. $(t + e)\ln t - t \in \mathrm{absmin}$; $S_{\max} = +\infty$.

6.8. $\hat{x} = -\cos t \notin \mathrm{locextr}$; $S_{\min} = -\infty$ $\left(x_n(t) = \hat{x}(t) + n\left(\mathrm{ch}(\pi - t) + \cos t - \frac{\mathrm{sh}\,\pi}{\mathrm{ch}\,\pi + 1}\left(\mathrm{sh}(\pi - t) + \sin t\right)\right)\right)$; $S_{\max} = +\infty$.

6.9. $\mathrm{sh}\,t \in \mathrm{absmin}$; $S_{\min} = \frac{\mathrm{sh}\,2}{2}$; $S_{\max} = +\infty$.

6.10. $1 - \cos t \in \mathrm{absmin}$; $S_{\max} = +\infty$.

6.11. $\left(\hat{x} = \frac{t^2}{2}, \widehat{T} = 1\right) \in \mathrm{absmin}$; $S_{\min} = 1$; $S_{\max} = +\infty$.

6.12. $-t^3 + t^2 \in \mathrm{absmin}$; $S_{\min} = -1$, $t^3 - t^2 \in \mathrm{absmax}$; $S_{\max} = 1$.

Глава 4

Задачи оптимального управления

В этой главе рассматриваются задачи оптимального управления. Приводятся формулировка и доказательство принципа максимума Понтрягина в общем случае, доказательство принципа максимума в частном случае для задачи со свободным концом. Решаются простейшая задача о быстродействии, аэродинамическая задача Ньютона и ряд других задач оптимального управления.

В пятидесятых годах потребности прикладных дисциплин (техники, экономики и др.) стимулировали постановку и рассмотрение нового класса экстремальных задач, получивших название *задач оптимального управления*. Необходимое условие экстремума для задач этого класса — «Принцип максимума», — сформулированное Л. С. Понтрягиным в 1956 году, было доказано и развито впоследствии им, его учениками и сотрудниками. Важно отметить, что это условие имеет существенно иную форму в сравнении с классическими уравнениями Эйлера и Лагранжа: в качестве обязательного условия в решении задачи оптимального управления входит решение вспомогательной задачи на максимум (отсюда и название — «принцип максимума»). За разработку теории оптимального управления Понтрягину и его сотрудникам В. Г. Болтянскому, Р. В. Гамкрелидзе и Е. Ф. Мищенко в 1962 году была присуждена Ленинская премия.

Понтрягин рассматривал задачу на максимум, мы же для единообразия с прошлым материалом будем рассматривать задачу на минимум, называя соответствующее условие *условием оптимальности*, и формулировать необходимые условия в лагранжевой форме.

В отличие от задачи Лагранжа в задаче оптимального управления вводится *управление* и появляется дополнительное ограничение типа включения на управление: $u \in U$. Множество U определяет возможности человека влиять на происходящий процесс.

§ 1. Принцип максимума Понтрягина в общем случае

1.1. Постановка задачи

Задачей оптимального управления (в понтрягинской форме) будем называть следующую задачу:

$$B_0(\xi) \to \min; \quad B_i(\xi) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m',$$
$$B_i(\xi) = 0, \quad i = m'+1, \ldots, m, \qquad (P)$$
$$\dot{x}(t) - \varphi\big(t, x(t), u(t)\big) = 0 \quad \forall\, t \in T, \qquad (1)$$
$$u(t) \in U \quad \forall\, t \in \Delta, \qquad (2)$$

где $\xi = \big(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1\big)$, $x \in PC^1(\Delta, \mathbf{R}^n)$, $u \in PC(\Delta, \mathbf{R}^r)$, $t_0, t_1 \in \Delta$, $t_0 < t_1$, Δ — заданный конечный отрезок, $U \subset \mathbf{R}^r$ — произвольное множество, $T \subset \Delta$ — множество точек непрерывности управления u,

$$B_i(\xi) = \int_{t_0}^{t_1} f_i\big(t, x(t), u(t)\big)\, dt + \psi_i\big(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)\big), \quad i = 0, 1, \ldots, m.$$

Здесь $PC(\Delta, \mathbf{R}^n)$ — пространство кусочно-непрерывных на отрезке Δ вектор-функций, соответственно $PC^1(\Delta, \mathbf{R}^n)$ — пространство непрерывных вектор-функций, имеющих кусочно-непрерывную производную.

Напомним, что *кусочно-непрерывной функцией* называется функция, имеющая не более конечного числа разрывов первого рода (в точках разрывов существуют конечные пределы слева и справа).

Вектор-функция $x = (x_1, \ldots, x_n)$ называется *фазовой переменной*, вектор-функция $u = (u_1, \ldots, u_r)$ называется *управлением*. Ограничение (1), являющееся дифференциальным уравнением, называется *дифференциальным ограничением*. Оно должно выполняться во всех точках непрерывности управления u. В отличии от задачи Лагранжа имеется ограничение (2) типа включения, которое должно выполняться во всех точках $t \in \Delta$, а фазовая переменная $x = (x_1, \ldots, x_n)$ может иметь меньшую гладкость. Частным случаем задачи оптимального управления (P) является задача, в которой один из концов или даже оба закреплены.

Элемент ξ, для которого выполнены все указанные условия и ограничения задачи, называется *допустимым* или еще говорят *допустимым управляемым процессом*.

Допустимый управляемый процесс $\widehat{\xi} = \big(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1\big)$ называется (локально) *оптимальным* (или еще говорят *оптимальным в сильном смысле процессом*), если существует $\delta > 0$ такое, что $B_0(\xi) \geqslant B_0(\widehat{\xi})$ для любого допустимого управляемого процесса $\xi = \big(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1\big)$, для которого $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C(\Delta)} < \delta$, $|t_0 - \hat{t}_0| < \delta$, $|t_1 - \hat{t}_1| < \delta$.

1.2. Формулировка теоремы

Теорема. *Пусть* $\widehat{\xi} = (\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ *— оптимальный (в сильном смысле) процесс в задаче оптимального управления* (P); *функции* f_i, $i = 0, 1, \ldots, m$, φ *и их частные производные по* x *непрерывны в некоторой окрестности множества* $\{(t, \hat{x}(t)) \mid t \in \Delta\}$, *декартово умноженного на* U, *а функции* ψ_i, $i = 0, 1, \ldots, m$, *непрерывно дифференцируемы в окрестности точки* $(\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), \hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1))$ (условие гладкости).

Тогда найдутся множители Лагранжа $(\lambda, p) \in \mathbf{R}^{m+1} \times PC^1(\Delta, \mathbf{R}^n)$, $(\lambda, p(\cdot)) \neq 0$, *такие, что для функции Лагранжа*

$$\Lambda = \int_{t_0}^{t_1} \big(f(t, x, u) + p(t)(\dot{x} - \varphi(t, x, u))\big)\, dt + l\big(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)\big),$$

где $f(t, x, u) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x, u)$, $l = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \psi_i\big(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)\big)$ *— терминант, выполнены условия*:

a) *стационарность по* x *— уравнение Эйлера для лагранжиана* $L(t, x, \dot{x}, u) = f(t, x, u) + p(\dot{x} - \varphi(t, x, u))$

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}(t) + \widehat{L}_x(t) = 0 \quad \forall\, t \in T \iff -\dot{p}(t) + \hat{f}_x(t) - p(t)\widehat{\varphi}_x(t) = 0;$$

b) *трансверсальность по* x

$$\widehat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x(t_0)} \iff p(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x(t_0)},$$
$$\widehat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x(t_1)} \iff p(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x(t_1)};$$

c) *оптимальность по* u

$$\min_{u \in U} L\big(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), u\big) = L\big(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \hat{u}(t)\big) \iff$$
$$\min_{u \in U} \big\{ f\big(t, \hat{x}(t), u\big) - p(t)\varphi\big(t, \hat{x}(t), u\big) \big\} = \hat{f}(t) - p(t)\widehat{\varphi}(t) \quad \forall\, t \in T;$$

d) *стационарность по подвижным концам* (выписывается только для подвижных концов отрезка интегрирования)

$$\widehat{\Lambda}_{t_0}(\hat{t}_0) = 0 \iff -\hat{f}(\hat{t}_0) + \hat{l}_{t_0} + \hat{l}_{x(t_0)}\dot{\hat{x}}(\hat{t}_0) = 0,$$
$$\widehat{\Lambda}_{t_1}(\hat{t}_1) = 0 \iff \hat{f}(\hat{t}_1) + \hat{l}_{t_1} + \hat{l}_{x(t_1)}\dot{\hat{x}}(\hat{t}_1) = 0;$$

e) *дополняющая нежесткость*

$$\lambda_i B_i(\widehat{\xi}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m';$$

f) *неотрицательность*

$$\lambda_i \geqslant 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m'.$$

1.3. Доказательство

A) *Игольчатые вариации, пакет иголок.* Проварьируем процесс $\widehat{\xi}$, включив его в конечно-параметрическое семейство, определяемое пакетом иголок (набором игольчатых вариаций управления $\hat{u}$). Для этого фиксируем натуральное число N, наборы: точек $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_N)$, $\tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_N$, управлений $v = (v_1, \ldots, v_N)$, длин $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ $(\tau_i \in T,\ v_i \in U,\ \alpha_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, N)$. Управление

$$u_\alpha(t) = \begin{cases} \hat{u}(t), & t \in \Delta \setminus \bigcup_{i=1}^{N} \Delta_i, \\ v_i, & t \in \Delta_i, \end{cases}$$

где $\Delta_i = [\tau_i - (N - i)|\alpha| - \alpha_i, \tau_i - (N - i)|\alpha|)$, $|\alpha| := \sqrt{\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_N^2}$, назовем *игольчатой вариацией управления* $\hat{u}$, определяемой пакетом иголок (τ, v, α). Некоторые точки τ_i, могут совпадать. Однако полуинтервалы Δ_i, имеющие длины α_i, устроены так, что они не пересекаются и при малом $|\alpha|$ лежат во множестве T.

Функция $x(t; t_0, x_0, \alpha)$, являющаяся решением уравнения

$$\dot{x} = \varphi(t, x, u_\alpha), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

называется *игольчатой вариацией функции* $\hat{x}$, определяемой точкой (t_0, x_0) и фиксированным пакетом иголок (τ, v). Ниже мы покажем, что если точка (t_0, x_0) находится в окрестности точки $(\hat{t}_0, \hat{x}_0)$ $(\hat{x}_0 := \hat{x}(\hat{t}_0))$, то при малом $|\alpha|$ решение дифференциального уравнения действительно существует и определено на всем отрезке Δ.

B) *Теорема существования. Лемма об игольчатой вариации.*

Теорема. *Предположим, что задача Коши*

$$\dot{x} = F(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (t_0 \in \operatorname{int} \Delta),$$

имеет решение $\hat{x} \in PC^1(\Delta, \mathbf{R}^n)$ *на конечном отрезке* Δ, *при этом* F *— функция непрерывная и непрерывно дифференцируемая по* x *в некоторой окрестности* G *траектории* $\Gamma_{\hat{x}} = \{(t, \hat{x}(t)) \mid t \in \Delta\}$.

Тогда найдется $G' \subset G$ *— окрестность траектории* $\Gamma_{\hat{x}}$ *такая, что для любой точки* $(t_0, x_0) \in G'$ *существует единственное решение* $x(\cdot; t_0, x_0)$ *задачи Коши, определенное на* Δ, *при этом функция* $x(t; t_0, x_0)$ *непрерывно дифференцируема во множестве* $\Delta \times G'$ *и*

$$x_{x_0}(t; t_0, x_0)\big|_{x_0 = \hat{x}(t_0)} = \Omega(t, t_0),$$
$$x_{t_0}(t; t_0, x_0)\big|_{x_0 = \hat{x}(t_0)} = -\Omega(t, t_0)F\big(t_0, \hat{x}(t_0)\big),$$

где $\Omega(t, t_0)$ *— фундаментальная система решений уравнения*:

$$\dot{\Omega}(t, t_0) = F_x\big(t, \hat{x}(t)\big)\Omega(t, t_0), \quad \Omega(t_0, t_0) = I \text{ (единичная матрица)}.$$

Это классическая теорема о существовании и непрерывно дифференцируемой зависимости решения дифференциального уравнения от начальных данных [АТФ, с. 195–204].

Лемма об игольчатой вариации. *Пусть наборы τ и v в пакете иголок (τ, v, α) фиксированы. Тогда существует $\varepsilon > 0$, такое, что если $0 < |\alpha| < \varepsilon$, $|x_0 - \hat{x}_0| < \varepsilon$, $|t_0 - \hat{t}_0| < \varepsilon$, то $\Delta_i \subset T$ и, кроме того, функция $x(t; t_0, x_0, \alpha)$ — решение уравнения (1) — определена на отрезке Δ, непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки $(\hat{t}_1, \hat{t}_0, \hat{x}_0, 0)$, при этом $\|x(\cdot; t_0, x_0, \alpha) - \hat{x}(\cdot)\|_{C(\Delta, \mathbb{R}^n)} \to 0$ при $(t_0, x_0, \alpha) \to (\hat{t}_0, \hat{x}_0, 0)$ и*

$$x_{x_0}(t; \hat{t}_0, \hat{x}_0, 0) = \Omega(t), \tag{2}$$

$$x_{t_0}(t; \hat{t}_0, \hat{x}_0, 0) = -\Omega(t)\widehat{\varphi}(\hat{t}_0), \tag{3}$$

где $\Omega(t) := \Omega(t, \hat{t}_0)$ — фундаментальная система решений уравнения:

$$\dot{\Omega}(t) = \widehat{\varphi}_x(t)\Omega(t), \quad \Omega(\hat{t}_0) = I.$$

Наметим путь доказательства леммы. Если управление $\hat{u}$ — непрерывная функция, то утверждения леммы сразу вытекают из теоремы о существовании и непрерывно дифференцируемой зависимости решения дифференциального уравнения от начальных данных. Если же $\hat{u}$ кусочно непрерывна, то нужно применить теорему несколько раз на каждом участке непрерывности.

C) *Редукция к конечномерной задаче.* Снова фиксируем N, наборы τ и v. Обозначим $z := (t_1, t_0, x_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^{2+n+N}$,

$$\widetilde{B}_i(z) := B_i\big(x(\cdot; t_0, x_0, \alpha), u_\alpha, t_0, t_1\big) =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} f_i\big(t, x(t; t_0, x_0, \alpha), u_\alpha(t)\big)\, dt + \psi_i\big(t_0, x_0, t_1, x(t_1; t_0, x_0, \alpha)\big)$$

и рассмотрим конечномерную задачу с ограничениями типа равенств и неравенств

$$\widetilde{B}_0(z) \to \min; \quad \widetilde{B}_i(z) \leqslant 0,\ i = 1, \ldots, m', \quad \widetilde{B}_i(z) = 0,\ i = m' + 1, \ldots, m,$$
$$\alpha_j \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, N. \tag{$P_{\tau,v}$}$$

В силу леммы об игольчатой вариации функции $\widetilde{B}_i$ непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $\hat{z} = (\hat{t}_1, \hat{t}_0, \hat{x}_0, 0)$ и элемент $(x(\cdot; t_0, x_0, \alpha), t_0, t_1) \to (\hat{x}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ в метрике пространства $C(\Delta, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^2$ при $z \to \hat{z}$. А так как элемент $\hat{\xi}$ доставляет локальный минимум в задаче (P), то точка $\hat{z} \in \operatorname{locmin} P_{\tau,v}$. Значит, к задаче $(P_{\tau,v})$ применим принцип

Лагранжа для конечномерных задач с равенствами и неравенствами. Согласно ему найдутся множители Лагранжа $\lambda_0, \ldots, \lambda_m$, $\mu_1, \ldots, \mu_N$, не все равные нулю $\big(\lambda_i = \lambda_i(\tau, v),\ \mu_j = \mu_j(\tau, v)\big)$ и такие, что для функции Лагранжа задачи $(P_{\tau,v})$

$$\widetilde{\Lambda} = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \widetilde{B}_i(z) - \sum_{j=1}^{N} \mu_j \alpha_j =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} f\big(t, x(t; t_0, x_0, \alpha), u_\alpha(t)\big)\, dt + l\big(t_0, x_0, t_1, x(t_1; t_0, x_0, \alpha)\big) - \sum_{j=1}^{N} \mu_j \alpha_j,$$

где $f(t, x, u) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x, u)$, $l(t_0, x_0, t_1, x_1) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \psi_i(t_0, x_0, t_1, x_1)$, выполнены условия

стационарности: $\widetilde{\Lambda}_z = 0$;

дополняющей нежесткости: $\lambda_i \widetilde{B}_i(\hat{z}) = 0$ $(\Leftrightarrow \lambda_i B_i(\hat{\xi}) = 0$, $i = 1, \ldots, m' \Leftrightarrow e))$, $\mu_j \alpha_j = 0$, $j = 1, \ldots, N$;

неотрицательности: $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 0, 1, \ldots, m'$ $(\Leftrightarrow f))$, $\mu_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, N$.

D) *Преобразование необходимых условий конечномерной задачи.* Обозначим p — решение дифференциального уравнения

$$\dot{p} + p\widehat{\varphi}_x = \hat{f}_x; \tag{a}$$

$$p(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x_1}. \tag{b$_1$}$$

Существование и единственность решения уравнения (a) с краевым условием (b_1) следует из теоремы существования и единственности решения задачи Коши для линейных систем [АТФ, с. 191]. Из определений функции p и определения функции Ω следует, что

$$\frac{d}{dt}(p\Omega) = \dot{p}\Omega + p\dot{\Omega} = \hat{f}_x\Omega - p\widehat{\varphi}_x\Omega + p\widehat{\varphi}_x\Omega = \hat{f}_x\Omega.$$

Отсюда

$$\int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} \hat{f}_x\Omega\, dt = \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} \frac{d}{dt}(p\Omega)\, dt = p(\hat{t}_1)\Omega(\hat{t}_1) - p(\hat{t}_0)\Omega(\hat{t}_0) \overset{(b_1)}{=} -\hat{l}_{x_1}\Omega(\hat{t}_1) - p(\hat{t}_0). \quad (*)$$

Распишем условия стационарности функции Лагранжа $\widetilde{\Lambda}$ в точке $\hat{z}$, учитывая лемму о приращении функционала и формулы из леммы об игольчатой вариации (см. ниже § 2):

$$\widetilde{\Lambda}_{\alpha_j}(\hat z) = f(\tau_j,\hat x(\tau_j),v_j) - \hat f(\tau_j) - p(\tau_j)\big(\varphi(\tau_j,\hat x(\tau_j),v_j) - \widehat{\varphi}(\tau_j)\big) - \mu_j = 0 \Rightarrow$$

$$f(\tau_j,\hat x(\tau_j),v_j) - \hat f(\tau_j) - p(\tau_j)\big(\varphi(\tau_j,\hat x(\tau_j),v_j) - \widehat{\varphi}(\tau_j)\big) = \mu_j \geqslant 0,$$

$$j = 1,\dots,N; \tag{$c_{\tau,v}$}$$

$$\widetilde{\Lambda}_{x_0}(\hat z) = \int_{\hat t_0}^{\hat t_1} \hat f_x(t)x_{x_0}(t;\hat t_0,\hat x_0,0)\,dt + \hat l_{x_0} + \hat l_{x_1}x_{x_0}(\hat t_1;\hat t_0,\hat x_0,0) =$$

$$\overset{(2)}{=} \int_{\hat t_0}^{\hat t_1} \hat f_x\Omega\,dt + \hat l_{x_0} + \hat l_{x_1}\Omega(\hat t_1) =$$

$$\overset{(*)}{=} -\hat l_{x_1}\Omega(\hat t_1) - p(\hat t_0) + \hat l_{x_0} + \hat l_{x_1}\Omega(\hat t_1) = -p(\hat t_0) + \hat l_{x_0} = 0; \tag{b_0}$$

$$\widetilde{\Lambda}_{t_0}(\hat z) = -\hat f(\hat t_0) + \int_{\hat t_0}^{\hat t_1} \hat f_x(t)x_{t_0}(t;\hat t_0,\hat x_0,0)\,dt + \hat l_{t_0} + \hat l_{x_1}x_{t_0}(\hat t_1;\hat t_0,\hat x_0,0) =$$

$$\overset{(3)}{=} -\hat f(\hat t_0) - \int_{\hat t_0}^{\hat t_1} \hat f_x(t)\Omega(t)\widehat{\varphi}(\hat t_0)\,dt + \hat l_{t_0} - \hat l_{x_1}\Omega(\hat t_1)\widehat{\varphi}(\hat t_0) =$$

$$\overset{(*)}{=} -\hat f(\hat t_0) + \hat l_{x_1}\Omega(\hat t_1)\widehat{\varphi}(\hat t_0) + p(\hat t_0)\widehat{\varphi}(\hat t_0) + \hat l_{t_0} - \hat l_{x_1}\Omega(\hat t_1)\widehat{\varphi}(\hat t_0) =$$

$$= -\hat f(\hat t_0) + p(\hat t_0)\dot{\hat x}(\hat t_0) + \hat l_{t_0} \overset{(b_0)}{=} -\hat f(\hat t_0) + \hat l_{t_0} + \hat l_{x_0}\dot{\hat x}(\hat t_0) = 0; \tag{d_0}$$

$$\widetilde{\Lambda}_{t_1}(\hat z) = \hat f(\hat t_1) + \hat l_{t_1} + \hat l_{x_1}\dot{\hat x}(\hat t_1) = 0. \tag{d_1}$$

Очевидно, что $\lambda \neq 0$, ибо иначе из определений f, l и p следовало бы, что $p \equiv 0$, а из соотношений $(c_{\tau,v})$ тогда следовало бы, что $\mu = 0$. А множитель Лагранжа $(\lambda,\mu) \neq 0$. Умножением на положительную константу нормируем вектор λ так, чтобы $|\lambda| = 1$.

Итак, получили: для точек $\tau_1,\dots,\tau_N \in T$, управлений $v_1,\dots,v_N \in U$, существует вектор $\lambda = (\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_m)$, $|\lambda| = 1$, такой, что выполняются соотношения a)–f) принципа максимума Понтрягина с условием оптимальности c) для конечного числа точек τ_i и управлений v_i.

E) *Окончание доказательства.* Рассмотрим в пространстве $\mathbf{R}^{m+1}$ подмножества $K(\tau,v)$, $\tau \in T$, $v \in U$, сферы $K = \{\lambda \in \mathbf{R}^{m+1} \mid |\lambda| = 1\}$, состоящие из тех векторов λ, для которых выполняются утверждения a)–f) теоремы о принципе максимума Понтрягина, причем в п. c) взято $t = \tau$, $u = v$. Сфера K является компактом, множества $K(\tau,v) \subset K$ замкнуты, конечное пересечение $\bigcap\limits_{j=1,\dots,N} K_{\tau_j,v_j} \neq \varnothing$.

Лемма о центрированной системе. *Пусть K — компакт, $\{K_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ — система замкнутых подмножеств K, любая конечная подсистема которой имеет непустое пересечение (центрированная система). Тогда пересечение всех множеств системы $\{K_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ непусто ($\bigcap\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} K_\alpha \neq \varnothing$).*

Доказательство. Обозначим O_α — дополнение к K_α в K ($O_\alpha\colon = K \setminus K_\alpha$). Тогда O_α открыто в K. Если $\bigcap\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} K_\alpha = \varnothing$, то $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} O_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}}(K \setminus K_\alpha) = K \setminus \bigcap\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} K_\alpha = K$, т.е. $\{O_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ есть открытое покрытие компакта K. По определению компакта из любого открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие, т.е. можно найти $\alpha_1,\dots,\alpha_N$, такие, что $\bigcup\limits_{j=1}^{N} O_{\alpha_j} = K$. Но тогда $\bigcap\limits_{j=1}^{N} K_{\alpha_j} = \bigcap\limits_{j=1}^{N}(K \setminus O_{\alpha_j}) = K \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{N} O_{\alpha_j} = \varnothing$ — противоречие с центрированностью системы. Значит, пересечение всех множеств системы $\bigcap\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} K_\alpha \neq \varnothing$. ■

По лемме о центрированной системе все множества $K(\tau,v)$ имеют непустое пересечение. Значит, существуют ненулевой вектор $\lambda = (\lambda_0,\dots,\lambda_m)$ и функция $p \in PC^1(\Delta,\mathbf{R}^n)$ такие, что выполняются утверждения теоремы a)–f) с условием оптимальности, выполняющимся для любых $\tau \in T$, $v \in U$. ■

Замечание. Принцип максимума доказан нами в пространстве $PC^1(\Delta,\mathbf{R}^n) \times PC(\Delta,\mathbf{R}^r) \times \mathbf{R}^2$. Небольшие изменения доказательства позволяют обосновать его в пространстве $W^1_\infty(\Delta,\mathbf{R}^n) \times L_\infty(\Delta,\mathbf{R}^r) \times \mathbf{R}^2$.

1.4. Пример

$$B(x(\cdot)) = \int_0^4 (\dot{x}^2 + x)\,dt \to \text{extr}; \quad |\dot{x}| \leqslant 1, \quad x(0) = 0.$$

Решение. Приведем задачу к виду задач оптимального управления, введя управление u:

$$\int_0^4 (u^2 + x)\,dt \to \text{extr}; \quad \dot{x} = u, \ u \in [-1, 1], \quad x(0) = 0.$$

Функция Лагранжа:

$$\Lambda = \int_0^4 \big(\lambda_0(u^2 + x) + p(\dot{x} - u)\big)\,dt + \lambda_1 x(0).$$

Необходимые условия:

a) уравнение Эйлера для лагранжиана $L = \lambda_0(u^2 + x) + p(\dot{x} - u)$

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0 \iff -\dot{p} + \lambda_0 = 0;$$

b) трансверсальность по x для терминанта $l = \lambda_1 x(0)$

$$L_{\dot{x}}(0) = l_{x(0)}, \quad L_{\dot{x}}(4) = -l_{x(4)} \iff p(0) = \lambda_1, \quad p(4) = 0;$$

c) оптимальность по u

$$\min_{u\in[-1,1]} \{\lambda_0 u^2 - pu\} = \lambda_0 \hat{u}^2 - p\hat{u};$$

d) неотрицательность

$\lambda_0 \geqslant 0$ в задаче на минимум,

$\lambda_0 \leqslant 0$ в задаче на максимум.

Если $\lambda_0 = 0$, то из a) $\dot{p} = 0$ и из b) $p = \lambda_1 = 0$ — все множители Лагранжа оказались нулями.

В задаче на минимум положим $\lambda_0 = 1$. Тогда из a) $\dot{p} = 1$ и из b) $p = t - 4$. Из условия c) следует, что

$$\hat{u} = \begin{cases} \operatorname{sign} p, & \left|\frac{p}{2}\right| \geqslant 1, \\ \frac{p}{2}, & \left|\frac{p}{2}\right| \leqslant 1, \end{cases} \iff \dot{\hat{x}} = \begin{cases} -1, & 0 \leqslant t < 2, \\ \frac{t}{2} - 2, & 2 \leqslant t \leqslant 4. \end{cases}$$

Интегрируя, получаем

$$\hat{x} = \begin{cases} -t + C_1, & 0 \leqslant t \leqslant 2, \\ \frac{t^2}{4} - 2t + C_2, & 2 \leqslant t \leqslant 4. \end{cases}$$

Из начального условия $x(0) = 0$ выводим, что $C_1 = 0$, а из условия непрерывности в точке $t = 2$ имеем $-2 = 1 - 4 + C_2 \Leftrightarrow C_2 = 1$. Таким образом,

$$\hat{x} = \begin{cases} -t, & 0 \leqslant t \leqslant 2, \\ \frac{t^2}{4} - 2t + 1, & 2 \leqslant t \leqslant 4. \end{cases}$$

Докажем с помощью непосредственной проверки, что функция $\hat{x}$ доставляет абсолютный минимум в задаче. Возьмем функцию $h \in PC^1([0, 4])$ такую, чтобы $\hat{x} + h$ была допустимой в задаче. Для этого надо взять функцию h, для которой $|\dot{\hat{x}} + \dot{h}| \leqslant 1$, $h(0) = 0$. Имеем

$$B(\hat{x} + h) - B(\hat{x}) = \int_0^4 \big((\dot{\hat{x}} + \dot{h})^2 + \hat{x} + h\big)\,dt - \int_0^4 (\dot{\hat{x}}^2 + \hat{x})\,dt =$$

$$= 2\int_0^4 \dot{\hat{x}}\dot{h}\,dt + \int_0^4 h\,dt + \int_0^4 \dot{h}^2\,dt \geqslant 2\int_0^4 \dot{\hat{x}}dh + \int_0^4 h\,dt.$$

Интегрируя по частям в первом интеграле с учетом условий $h(0) = 0$, $\dot{\hat{x}}(4) = 0$, получим

$$B(\hat{x} + h) - B(\hat{x}) \geqslant 2\dot{\hat{x}}h\Big|_0^4 + \int_0^4 (-2\ddot{\hat{x}} + 1)h\,dt = \int_0^4 (-2\ddot{\hat{x}} + 1)h\,dt.$$

Подставляя в последний интеграл найденную функцию $\hat{x}$ и разбивая отрезок интегрирования на два, имеем

$$B(\hat{x} + h) - B(\hat{x}) \geqslant \int_0^2 h\,dt \geqslant 0,$$

ибо $h(t) \geqslant 0$ при $t \in [0, 2]$, так как $h(0) = 0$, и $\dot{h} \geqslant 0$ при $t \in [0, 2]$ (т. е. функция h возрастает на отрезке $[0, 2]$ и, следовательно, неотрицательна). Итак, $\hat{x} \in \text{absmin}$.

$$S_{\min} = B(\hat{x}) = \int_0^4 (\dot{\hat{x}}^2 + \hat{x})\,dt = \int_0^2 (1 - t)\,dt + \int_2^4 \left(\left(\frac{t}{2} - 2\right)^2 + \frac{t^2}{4} - 2t + 1\right)dt =$$

$$= \left(t - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^2 + \int_2^4 \left(\frac{t^2}{2} - 4t + 5\right) dt = 2 - 2 + \left(\frac{t^3}{6} - 2t^2 + 5t\right)\Big|_2^4 = -4\frac{2}{3}.$$

В задаче на максимум положим $\lambda_0 = -1$. Тогда из a) $\dot p = -1$ и из b) $p = 4 - t$. Из условия c)

$$\min_{u\in[-1,1]} \{-u^2 - pu\} = -\hat u^2 - p\hat u$$

следует, что

$$\hat u = \dot{\hat x} = \operatorname{sign} p = \operatorname{sign}(4 - t) = 1, \quad 0 \leqslant t < 4.$$

Интегрируя, получаем $\hat x = t + C$. Из начального условия $x(0) = 0$ вытекает, что $C = 0$. Таким образом, $\hat x = t$.

Докажем с помощью непосредственной проверки, что функция $\hat x$ доставляет абсолютный максимум в задаче. Возьмем функцию $h \in PC^1([0, 4])$ такую, чтобы $\hat x + h$ была допустимой в задаче. Для этого надо взять функцию h, для которой $|\dot{\hat x} + \dot h| \leqslant 1$ ($\Leftrightarrow |1 + \dot h| \leqslant 1 \Leftrightarrow -2 \leqslant \dot h \leqslant 0$), $h(0) = 0$. Как и при проверке экстремали на минимум имеем

$$B(\hat x + h) - B(\hat x) = 2\int_0^4 \dot{\hat x}\dot h\, dt + \int_0^4 \dot h^2\, dt + \int_0^4 h\, dt = \int_0^4 (2 + \dot h)\dot h\, dt + \int_0^4 h\, dt.$$

Оба интеграла неположительны, поскольку в первом интеграле $\dot h \leqslant 0$, а $2 + \dot h \geqslant 0$, а во втором интеграле $h \leqslant 0$, так как $h(0) = 0$ и $\dot h \leqslant 0$ (т. е. функция h убывает). Следовательно,

$$B(\hat x + h) - B(\hat x) \leqslant 0,$$

т. е. $\hat x = t \in \operatorname{absmax}$:

$$S_{\max} = B(\hat x(\cdot)) = \int_0^4 (\dot{\hat x}^2 + \hat x)\, dt = \int_0^4 (1 + t)\, dt = \left(t + \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^4 = 4 + 8 = 12.$$

То, что $\hat x = t \in \operatorname{absmax}$ можно было бы получить и без непосредственной проверки из условия самой задачи. Разобьем исходный функционал на два интеграла. Максимум $\int_0^4 \dot x^2\, dt$ при $|\dot x| \leqslant 1$ достигается на $|\dot x| = 1$, а максимум $\int_0^4 x\, dt$ при $|\dot x| \leqslant 1$, $x(0) = 0$, достигается при наибольшем возрастании функции x, т. е. при $\dot x = 1$ ($\Leftrightarrow \hat x = t$).

§ 2. Формулировка и доказательство принципа максимума Понтрягина для задачи со свободным концом

Приведем формулировку и доказательство принципа максимума Понтрягина для следующего частного случая задачи оптимального управления — задачи со свободным концом и закрепленным временем:

$$B(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))\, dt + \psi(x(t_1)) \to \min; \qquad (P)$$

$$\dot x(t) - \varphi(t, x(t), u(t)) = 0 \quad \forall\, t \in T, \quad u(t) \in U \quad \forall\, t \in [t_0, t_1], \quad x(t_0) = x_0,$$

где $U \subset \mathbb{R}^r$ — произвольное множество, $T \subset [t_0, t_1]$ — множество точек непрерывности управления $u(\cdot)$.

Теорема. *Пусть* $(\hat x(\cdot), \hat u(\cdot))$ *— оптимальный процесс в задаче оптимального управления* (P)*. Функции* f, φ *и их частные производные по* x *непрерывны в некоторой окрестности множества* $\{(t, \hat x(t)) \mid t \in [t_0, t_1]\}$*, декартово умноженного на* U*, а функция* ψ *непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки* $\hat x(t_1)$ (условие гладкости).

Тогда выполняется условие оптимальности по u:

$$f(t, \hat x(t), u) - p(t)\varphi(t, \hat x(t), u) \geqslant \hat f(t) - p(t)\hat\varphi(t) \quad \forall\, t \in T, \quad \forall\, u \in U, \quad (1)$$

где p *— единственное решение дифференциального уравнения*

$$-\dot p(t) + \hat f_x(t) - p(t)\hat\varphi_x(t) = 0 \quad \forall\, t \in T \qquad (2)$$

с краевым условием

$$p(t_1) = -\psi'(\hat x(t_1)). \qquad (3)$$

Отметим, что принцип оптимальности (1) с условиями (2)–(3) может быть выведен из необходимых условий оптимальности в общей задаче оптимального управления, множитель Лагранжа λ_0 при функционале B оказывается равным единице, а условие трансверсальности по $x(t_0)$ не существенно.

Доказательство. Единственность решения уравнения (2) с краевым условием (3) следует из теоремы существования и единственности решения задачи Коши для линейных систем [АТФ, с. 191].

A) *Игольчатые вариации.* Зафиксируем точку $\tau \in T$, элемент $v \in U$ и такое малое число $\alpha \geqslant 0$, что отрезок $[\tau - \alpha, \tau] \subset T$.

Управление

$$u_\alpha(t) = \begin{cases} \hat u(t), & t \notin [\tau - \alpha, \tau), \\ v, & t \in [\tau - \alpha, \tau), \end{cases}$$

назовем *элементарной игольчатой вариацией управления* $\hat{u}$. Пусть $x_\alpha(\cdot)$ — решение уравнения $\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u_\alpha(t))$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$. По локальной теореме существования [АТФ, с. 186–189] функция x_α определена при малых α в некоторой окрестности точки t_0, но из леммы 1, формулируемой ниже, следует, что на самом деле векторфункция x_α определяется единственным образом на всем отрезке $[t_0, t_1]$. Функция x_α называется *элементарной игольчатой вариацией функции* $\hat{x}$, а пара (x_α, u_α) — *элементарной игольчатой вариацией процесса* $(\hat{x}, \hat{u})$. Тройку (τ, v, α), определяющую эту вариацию, будем называть *элементарной иголкой*.

В) **Лемма 1** (о свойствах элементарной игольчатой вариации). *Пусть в элементарной иголке (τ, v, α) точка $\tau \in T$ и управление $v \in U$ фиксированы. Тогда существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\alpha \in [0, \varepsilon]$ отрезок $[\tau - \alpha, \tau] \subset T$, а функция x_α — игольчатая вариация функции — $\hat{x}$ определена на всем отрезке $[t_0, t_1]$; при этом при $\alpha \to +0$*

1) *функция $x_\alpha(\cdot) \to \hat{x}(\cdot)$ в метрике пространства $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$;*

2) *функция $\dfrac{x_\alpha(\cdot) - \hat{x}(\cdot)}{\alpha} \to y(\cdot)$ в метрике пространства $C([\tau, t_1], \mathbb{R}^n)$,*

где функция y кусочно дифференцируема на отрезке $[\tau, t_1]$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{y}(t) = \hat{\varphi}_x(t)y(t) \quad \forall\, t \in [\tau, t_1] \cap T \tag{4}$$

с начальным условием

$$y(\tau) = \varphi(\tau, \hat{x}(\tau), v) - \hat{\varphi}(\tau). \tag{5}$$

Доказательство леммы следует из двух основополагающих фактов теории обыкновенных дифференциальных уравнений: локальной теоремы существования и теоремы о непрерывной дифференцируемости решения по начальным данным. Мы не приводим их здесь, отсылая к книге АТФ, с. 89–91.

C) **Лемма 2** (о приращении функционала). *Пусть в элементарной иголке (τ, v, α) точка $\tau \in T$ и управление $v \in U$ фиксированы, $B(\alpha) := B\big(x_\alpha(\cdot), u_\alpha(\cdot)\big)$. Тогда функция B дифференцируема справа в нуле и*

$$B'(+0) = f\big(\tau, \hat{x}(\tau), v\big) - \hat{f}(\tau) - p(\tau)\big(\varphi(\tau, \hat{x}(\tau), v) - \hat{\varphi}(\tau)\big).$$

Доказательство леммы 2. Используя теорему о среднем для определенных интегралов, правило перехода к пределу под знаком интеграла, дифференцируемость по Фреше и лемму 1, получим

$$B'(+0) = \lim_{\alpha \to +0} \frac{B(\alpha) - B(0)}{\alpha} = \lim_{\alpha \to +0} \frac{B(x_\alpha, u_\alpha) - B(\hat{x}, \hat{u})}{\alpha} =$$

$$= \lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha} \left(\int_{t_0}^{t_1} \big(f(t, x_\alpha(t), u_\alpha(t)) - \hat{f}(t)\big)\, dt \right) + \lim_{\alpha \to +0} \frac{\psi(x_\alpha(t_1)) - \psi(\hat{x}(t_1))}{\alpha} =$$

$$= \lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha} \left(\int_{\tau-\alpha}^{\tau} \big(f(t, x_\alpha(t), v) - \hat{f}(t)\big)\, dt + \int_{\tau}^{t_1} \big(f(t, x_\alpha(t), \hat{u}(t)) - \hat{f}(t)\big)\, dt \right) +$$

$$+ \lim_{\alpha \to +0} \frac{\psi'(\hat{x}(t_1))[x_\alpha(t_1) - \hat{x}(t_1)] + o(x_\alpha(t_1) - \hat{x}(t_1))}{\alpha} =$$

$$= \lim_{\alpha \to +0} \big(f(t, x_\alpha(t), v) - \hat{f}(t)\big)\Big|_{t \in [\tau-\alpha; \tau]} + \lim_{\alpha \to +0} \int_{\tau}^{t_1} \frac{\big(f'|_{\hat{x}}[x_\alpha - \hat{x}] + o(x_\alpha - \hat{x})\big)(t)}{\alpha}\, dt +$$

$$+ \psi'\big(\hat{x}(t_1)\big)y(t_1) = f(\tau, \hat{x}(\tau), v) - \hat{f}(\tau) + \int_{\tau}^{t_1} \hat{f}_x(t)y(t)\, dt - p(t_1)y(t_1).$$

Выражая $\hat{f}_x$ из уравнения (2), учитывая уравнение (4), и начальное условие (5) для $y(\tau)$, имеем

$$\int_{\tau}^{t_1} \hat{f}_x y\, dt = \int_{\tau}^{t_1} (\dot{p} + p\hat{\varphi}_x) y\, dt = \int_{\tau}^{t_1} (\dot{p}y + p\dot{y})\, dt = \int_{\tau}^{t_1} \frac{d}{dt}(py)\, dt =$$

$$= p(t_1)y(t_1) - p(\tau)y(\tau) = p(t_1)y(t_1) - p(\tau)\big(\varphi(\tau, \hat{x}(\tau), v) - \hat{\varphi}(\tau)\big).$$

Подставляя найденное значение $\int_{\tau}^{t_1} \hat{f}_x y\, dt$ в выражение для $B'(+0)$, получим искомое представление. ■

D) *Завершение доказательства.* Из леммы 1 следует, что если $\alpha \in [0, \varepsilon]$, то (x_α, u_α) — допустимый управляемый процесс и $x_\alpha(\cdot)$ равномерно стремится к $\hat{x}(\cdot)$. Поскольку $(\hat{x}, \hat{u})$ — оптимальный процесс, то при малых $\alpha > 0$

$$B(x_\alpha, u_\alpha) \geqslant B(\hat{x}, \hat{u}) \iff B(\alpha) \geqslant B(0).$$

Отсюда по лемме 2 $B'(+0) \geqslant 0$, и из выражения для $B'(+0)$ вытекает, что

$$f(\tau, \hat{x}(\tau), v) - p(\tau)\varphi(\tau, \hat{x}(\tau), v) \geqslant \hat{f}(\tau) - p(\tau)\hat{\varphi}(\tau) \quad \forall\, \tau \in T, \quad \forall\, v \in U,$$

т. е. выполняется соотношение (1). Теорема полностью доказана. ■

§ 3. Избранные задачи оптимального управления

3.1. Простейшая задача о быстродействии

Рассмотрим задачу о наибыстрейшей остановке лифта в шахте, вошедшую во многие монографии по оптимальному управлению. Лифт управляется под воздействием внешней силы, которая может изменяться в заданных пределах, регулируемых человеком. Предположим, что возможности действующей силы, а следовательно, и ускорения, ограничены какой-то величиной, например, ускорение может изменяться от -1 до $+1$. Требуется за кратчайшее время T остановить ($\dot{x}(T)=0$) лифт, для определенности в начале координат ($x(T)=0$). Нетрудно видеть, что задача может быть формализована следующим образом:

$$T \to \min; \quad |\ddot{x}| \leqslant 1, \quad x(0)=\xi_1, \quad \dot{x}(0)=\xi_2, \quad x(T)=\dot{x}(T)=0.$$

Аналогично формализуется задача о машине, движущейся прямолинейно без трения по горизонтальной дороге. Машина может двигаться в любую сторону с ускорением, не превышающем единицу. Требуется остановить машину в определенном месте за кратчайшее время.

Решение. Приведем задачу к виду задач оптимального управления, вводя вместо функции x вектор-функцию (x_1,x_2), управление u и обозначения: $x_1=x$, $x_2=\dot{x}$, $u=\ddot{x}$,

$$T \to \min; \quad \dot{x}_1=x_2, \quad \dot{x}_2=u, \quad u\in[-1,1],$$
$$x_1(0)=\xi_1, \quad x_2(0)=\xi_2, \quad x_1(T)=x_2(T)=0.$$

Функция Лагранжа:

$$\Lambda = \int_0^T \big(p_1(t)(\dot{x}_1-x_2)+p_2(t)(\dot{x}_2-u)\big)\,dt +$$
$$+\lambda_0 T+\lambda_1(x_1(0)-\xi_1)+\lambda_2\big(x_2(0)-\xi_2\big)+\lambda_3 x_1(T)+\lambda_4 x_2(T).$$

Необходимые условия:

a) система уравнений Эйлера для лагранжиана $L=p_1(t)(\dot{x}_1-x_2)+p_2(t)(\dot{x}_2-u)$

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dt}L_{\dot{x}_1}+L_{x_1}=0, \\ -\dfrac{d}{dt}L_{\dot{x}_2}+L_{x_2}=0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\dot{p}_1=0, \\ -\dot{p}_2-p_1=0 \end{cases} \iff p_2(t)=C_1t+C_2;$$

b) трансверсальность по x для терминанта $l=\lambda_0T+\lambda_1(x_1(0)-\xi_1)+\lambda_2(x_2(0)-\xi_2)+\lambda_3x_1(T)+\lambda_4x_2(T)$

$$L_{\dot{x}_1}(0)=l_{x_1(0)}, \quad L_{\dot{x}_1}(T)=-l_{x_1(T)} \iff p_1(0)=\lambda_1, \quad p_1(T)=-\lambda_3,$$

$$L_{\dot{x}_2}(0)=l_{x_2(0)}, \quad L_{\dot{x}_2}(T)=-l_{x_2(T)} \iff p_2(0)=\lambda_2, \quad p_2(T)=-\lambda_4;$$

c) оптимальность по u (не зависящие от u слагаемые не выписываем)

$$\min_{u\in[-1,1]}\{-p_2(t)u\}=-p_2(t)\hat{u}(t) \Rightarrow \hat{u}(t)=\begin{cases} \operatorname{sign}p_2(t), & p_2(t)\neq 0, \\ \text{любое из } [-1,1], & p_2(t)=0; \end{cases}$$

d) стационарность по T

$$\Lambda_T(T)=0 \iff \lambda_0+\lambda_3\dot{x}_1(T)+\lambda_4\dot{x}_2(T)=0;$$

e) неотрицательность

$$\lambda_0\geqslant 0.$$

Учитывая то, что из начального условия следует $\dot{x}_1(T)=0$, а из b) $\lambda_4=-p_2(T)$, получаем, что d) равносильно условию $\lambda_0=p_2(T)\hat{u}(T)$.

Поэтому если $\lambda_0=0$, то $p_2(T)=0$ либо $\hat{u}(T)=0$, но тогда из c) вновь $p_2(T)=0$. При этом p_2 не может быть тождественным нулем, ибо иначе все множители Лагранжа были бы нулями. Значит, из a) $p_2(t)=C(t-T)$, а тогда из c) следует, что $\hat{u}(t)\equiv 1$ или $\hat{u}(t)\equiv -1$. Множество начальных условий, соответствующих таким управлениям, описывается уравнением

$$\xi_2=\varphi(\xi_1):=\begin{cases} -\sqrt{2\xi_1}, & \xi_1\geqslant 0, \\ \sqrt{-2\xi_1}, & \xi_1\leqslant 0, \end{cases}$$

Действительно, пусть $\hat{u}(t)\equiv 1 \Leftrightarrow \dot{\hat{x}}_2(t)\equiv 1 \overset{x_2(T)=0}{\Rightarrow} x_2(t)=t-T \overset{x_1(T)=0}{\Rightarrow} x_1(t)=(t-T)^2/2 \Rightarrow \xi_1=\xi_2^2/2\geqslant 0 \Rightarrow \xi_2=-\sqrt{2\xi_1}$ (при извлечении квадратного корня берем знак минус, поскольку $\xi_2=x_2(0)=-T<0$, при этом минимальное время движения $T=-\xi_2>0$). В случае $\hat{u}(t)\equiv -1$ аналогично получаем, что $\xi_2=\sqrt{-2\xi_1}$, $\xi_1\leqslant 0$. Ниже покажем, что найденное время движения действительно доставляет минимум в задаче. Таким образом, в нашей задаче в этих случаях минимум достигается при $\lambda_0=0$.

Если же $\xi_2\neq\varphi(\xi_1)$, то $\lambda_0\neq 0$, и мы полагаем $\lambda_0=1$. Тогда из d) вытекает, что $|p_2(T)|=1$, т. е. имеются две возможности:

$$p_2^+(t)=C(t-T)+1, \quad p_2^-(t)=C(t-T)-1.$$

Этим возможностям в силу b) соответствуют такие управления:

$$u^+=\begin{cases} -1, & 0\leqslant t<\tau, \\ 1, & \tau<t\leqslant T, \end{cases} \qquad u^-=\begin{cases} 1, & 0\leqslant t<\tau, \\ -1, & \tau<t\leqslant T. \end{cases}$$

Рассмотрим траектории, соответствующие оптимальным управлениям u^+ и u^- на плоскости (x_1,x_2), называемой *фазовой плоскостью*.

Для тех значений t, для которых $u(t) = 1$, имеем

$$\dot{x}_2 = 1 \Rightarrow \dot{x}_1 = x_2 = t + C' \Rightarrow x_1 = \frac{t^2}{2} + C't + C'' = \frac{x_2^2}{2} + C.$$

Таким образом, фазовая траектория, соответствующая этим значениям t, является куском параболы $x_1 = \frac{x_2^2}{2} + C$. Направление движения по такой параболе определяется из условия возрастания x_2, так как в этом случае $\dot{x}_2 = 1$. Аналогично получаем, что для тех значений t, для котőрых $u(t) = -1$, фазовая траектория — кусок параболы $x_1 = -\frac{x_2^2}{2} + C$, а направление движения определяется из условия убывания x_2, так как $\dot{x}_2 = -1$.

Укажем теперь то место на фазовой плоскости (x_1, x_2), где должно совершаться переключение управления. В искомую точку (0,0) ($x_1(T) = x_2(T) = 0$) мы должны попасть не более чем с одним переключением, двигаясь по фазовой траектории по разрешенному направлению. Совокупность начальных условий, соответствующих управлениям u^+ и u^-, описывается неравенствами $\xi_2 > \varphi(\xi_1)$ (для u^+) и $\xi_2 < \varphi(\xi_1)$ (для u^-). Переключения совершаются на кривой $\xi_2 = \varphi(\xi_1)$. При этом, как нетрудно видеть, для каждого начального условия имеется единственная фазовая кривая, приводящая в точку $(0, 0)$.

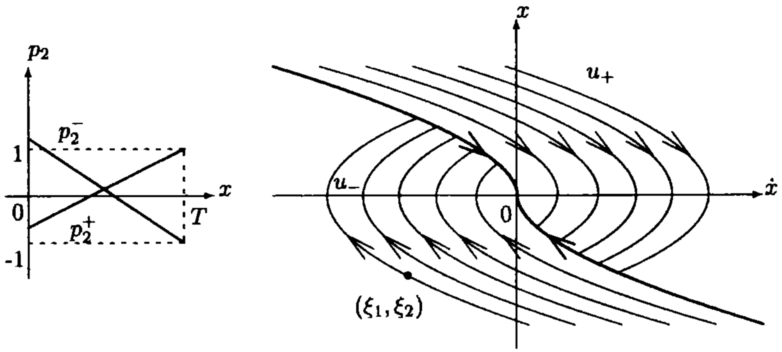


Рис. 7.

Поскольку всегда $|\dot{x}_2| = 1$ на оптимальной траектории, то $x_2 = |t| + C$ и, значит, время движения $\widehat{T} = Var\ x_2$ (вариация функции x_2). Однако проще находить оптимальное время $\widehat{T}$, строя функцию $x(\cdot)$ класса $PC^2([t_0, t_1])$, удовлетворяющую необходимым условиям экстремума и начальным условиям. В примере 2 пункта 3.3 будет приведено решение одной из конкретных задач быстродействия.

Покажем, что оптимальная траектория, начинающаяся в точке (ξ_1, ξ_2), доставляет решение задаче. Пусть этой траектории соответствует управление $\hat{u}$ (для определенности $\hat{u}^-$), функция $\hat{x}$ и время $\widehat{T}$. Предположим, что имеется некоторый другой допустимый управляемый процесс (x, u, T), $T \leqslant \widehat{T}$. Доопределим функцию $x(\cdot)$ нулем на отрезке $[T, \widehat{T}]$.

Воспользуемся следующей формулой восстановления функции по ее n-й производной

$$x(\tau) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\tau (\tau - s)^{n-1} x^{(n)}(s)\, ds + \sum_{k=0}^{n-1} x^{(k)}(0) \frac{\tau^k}{k!}.$$

По этой формуле при $n = 2$ в силу условий на левом конце функции x и $\hat{x}$ в точке τ можно представить в виде

$$x(\tau) = \int_0^\tau (\tau - s)\ddot{x}(s)\, ds + \xi_2 \tau + \xi_1.$$

Поскольку $\ddot{\hat{x}}(s) = 1 \geqslant \ddot{x}(s) \quad \forall\, s \in [0, \tau]$, то

$$\hat{x}(\tau) - x(\tau) = \int_0^\tau (\tau - s)\big(1 - \ddot{x}(s)\big) ds \geqslant 0,$$

причем равенство здесь возможно только, если во всех точках непрерывности $\ddot{x}(s) \equiv 1$, а тогда $x(t) = \hat{x}(t)\ \forall\, t \in [0, \tau]$.

Аналогично с учетом условий на правом конце функции x и $\hat{x}$ в точке τ можно представить в виде

$$x(\tau) = \int_\tau^{\widehat{T}} (s - \tau)\ddot{x}(s)\, ds.$$

Поскольку $\ddot{\hat{x}}(s) = -1 \leqslant \ddot{x}(s) \quad \forall\, s \in [\tau, \widehat{T}]$, то

$$\hat{x}(\tau) - x(\tau) = \int_\tau^{\widehat{T}} (s - \tau)\big(-1 - \ddot{x}(s)\big) ds \leqslant 0,$$

причем равенство и здесь возможно только, если $\ddot{x}(s) \equiv -1$, а тогда $x(t) = \hat{x}(t) \quad \forall\, t \in [\tau, \widehat{T}]$.

Таким образом, имеем, что $x(\tau) = \hat{x}(\tau)$ и, следовательно, $x(t) \equiv \hat{x}(t)\ \forall\, t \in [0, \widehat{T}]$. Отсюда $T = \widehat{T}$.

3.2. Аэродинамическая задача Ньютона

Задача Ньютона — это задача о сопротивлении движению тела вращения в «редкой» среде. Необходимо выбрать форму тела вращения так, чтобы сопротивление движению было минимально.

История задачи

В 1687 году вышли «Математические начала натуральной философии» Ньютона. В седьмом разделе, озаглавленном «О движении жидкостей и сопротивлении брошенных тел», Ньютон рассматривает задачу о сопротивлении шара и цилиндра в «редкой» среде. Затем в «Поучении», при исследовании сопротивления усеченного конуса, Ньютон делает следующее утверждение.

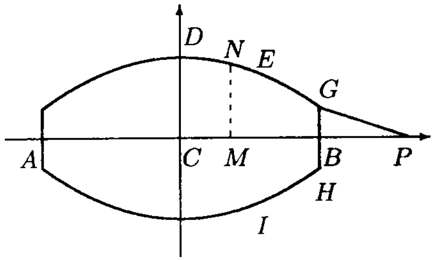


Рис. 8.

Пусть $DNEG$ — некоторая кривая. Из произвольной точки N кривой опустим перпендикуляр на ось AB и из заданной точки G проведем прямую, параллельную касательной к кривой в точке N. Эта прямая пересечет ось AB в точке P. Тогда если имеет место пропорция $\frac{MN}{GP} = \frac{GP^3}{4BP\cdot BG^2}$, то тело получающееся вращением кривой $DNEG$ около оси AB, будет испытывать наименьшее сопротивление в вышеупомянутой редкой среде среди других тел такой же длины и ширины.

Ньютон не дал объяснения тому, как он пришел к этому результату. Опубликованные в наше время материалы Ньютона показывают, что он владел элементами многих конструкций, которые потом были использованы при создании вариационного исчисления.

Но, как будет видно в дальнейшем, задача Ньютона относится даже собственно не к вариационному исчислению, а к оптимальному управлению, теория которого начала разрабатываться только в середине этого века.

Формализация задачи

Сопротивление движущегося тела зависит от законов сопротивления среды. Ньютон представлял себе среду состоящей из неподвижных частиц фиксированной массы m, являющихся абсолютно упругими шарами. Мы также будем придерживаться этого предположения.

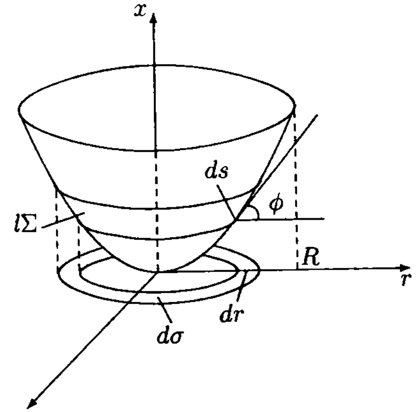


Рис. 9.

Пусть тело вращения вокруг оси x движется в направлении, обратном оси x в описанной выше среде со скоростью v. Элемент dr на оси r при вращении вокруг Ox описывает кольцо $d\sigma$. Этому кольцу соответствует пояс $d\Sigma$ на теле вращения. За время dt этот пояс «вытеснит» объем $dV = 2\pi r\,dr\,v\,dt$, где $2\pi r\,dr$ — площадь $d\sigma$. При этом слой столкнется с $N = \frac{\rho}{m}dV = \frac{\rho}{m}2\pi r\,dr\,v\,dt$ частицами, где ρ — плотность среды. Предположим, что участок ds наклонен к оси r под углом φ.

Тогда одна частица, ударившись о слой получит приращение импульса, равное $m(\bar v_2 - \bar v_1) = -2mv\cos\varphi\cdot\bar n$, $|\bar v_1| = |\bar v_2| = v$, $\bar n$ — единичный вектор нормали к $d\Sigma$. По третьему закону Ньютона, тело получит приращение импульса $2mv\cos\varphi\,\bar n$. За время dt таких приращений будет N, а так как в силу симметрии компоненты $\bar n_r$ вектора $-\bar n$, т. е. ортогональные оси вращения, сократятся, то суммарное приращение импульса будет направлено вдоль оси x и модуль его будет равен

$$N2mv\cos\varphi\cos\varphi = \frac{2\rho\pi r v\,dr\,dt}{m}2mv\cos^2\varphi = 4\rho\pi v^2 r\cos^2\varphi\,dr\,dt.$$

В силу второго закона Ньютона это приращение равно $dF\,dt$, следовательно $dF = 4\rho\pi v^2 r\cos^2\varphi\,dr$, где $k = 4\rho v^2\pi$. Просуммировав dF по всем поясам $d\Sigma$ (т. е. по всем элементам dr), получим

$$F = k\int_0^R \frac{r\,dr}{1+\left(\frac{dx}{dr}\right)^2} \qquad \left(\cos^2\varphi = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{1}{1+\left(\frac{dx}{dr}\right)^2}\right).$$

Таким образом, заменив r на t и R на T_0, получаем экстремальную задачу:

$$\int\limits_0^{T_0} \frac{t\,dt}{1+\dot{x}^2} \to \min; \quad x(0)=0, \quad x(T_0)=\xi.$$

Очевидно, что нижняя грань интеграла равна 0. Действительно, $\frac{t}{1+\dot{x}^2} \geqslant 0$ при $t \in [0, T_0]$, и выбрав ломаную $x(t)$ так, чтобы $|\dot{x}(t)|$ был очень большим, получим сколь угодно малый интеграл. Получается противоречие, т.е. чем более зазубрен профиль на теле, тем меньше сопротивление. Дело в том, что в формализации неявно использовалась монотонность профиля, так как только в этом случае частица сталкивается с телом один раз. Таким образом к условию задачи нужно добавить требование $\dot{x} \geqslant 0$. Форма тела вращения задается функцией $x(t)$ такой, что $x(0)=0$, $x(T_0)=\xi$ (ξ — заданное число). Для того, чтобы столкновение частицы среды учитывать только один раз, налагаем условие $u \geqslant 0$.

Формализованно задача оптимального управления выписывается следующим образом:

$$\int\limits_0^{T_0} \frac{t\,dt}{1+u^2} \to \min; \quad \dot{x}=u, \quad u \geqslant 0, \quad x(0)=0, \quad x(T_0)=\xi.$$

Функция Лагранжа

$$\Lambda = \int\limits_0^{T_0} \left(\frac{\lambda_0 t}{1+u^2} + p(\dot{x}-u)\right) dt + \lambda_1 x(0) + \lambda_2 x(T_0).$$

Необходимые условия:

a) система уравнений Эйлера: $\quad -\dot{p}=0 \quad (\Leftrightarrow p=\mathrm{const})$;

b) трансверсальность по x: $\quad p(0)=\lambda_1, \ p(T_0)=-\lambda_2$;

c) оптимальность по u:

$$\min_{u\geqslant 0}\left\{\frac{\lambda_0 t}{1+u^2} - pu\right\} = \frac{\lambda_0 t}{1+\hat{u}^2} - p\hat{u};$$

d) неотрицательность: $\quad \lambda_0 \geqslant 0$.

Если $\lambda_0=0$, то $p \neq 0$ (если $p=0$, то из b) следует, что $\lambda_1=\lambda_2=0$ — все множители Лагранжа — нули). Минимум в соотношении c) конечен только, если $p<0$, при этом $\hat{u}=0$, т.е. $\dot{\hat{x}}=0$. Из условия $x(0)=0$ вытекает, что $\hat{x}\equiv 0$, тогда $\xi=0$.

Пусть $\lambda_0 \neq 0$. Положим $\lambda_0=1$. Тогда для достижения минимума в c) необходимо, чтобы $p<0$ (если $p \geqslant 0$, то функция $L(t,u) := \dfrac{t}{1+u^2} - pu$

монотонно убывает с возрастанием u и не достигает минимума). Если $\hat{u}(t)>0$, то $L_u=0$. И из c) управление $\hat{u}(t)$ должно находиться из уравнения

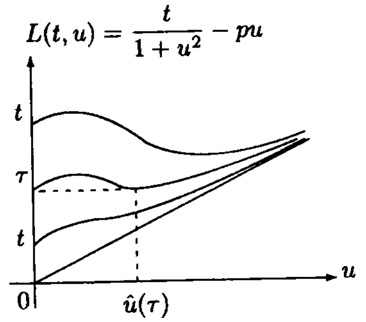


Рис. 10.

Момент излома управления τ характеризуется уравнениями

$$p = -\frac{2\hat{u}(\tau)\tau}{\left(1+\hat{u}^2(\tau)\right)^2}, \qquad \tau = \frac{\tau}{1+\hat{u}^2(\tau)} - p\hat{u}(\tau) \tag{2}$$

(второе уравнение в (2) $L(\tau-0,0) = L(\tau,\hat{u}(\tau))$ — условие совпадения минимумов в точке τ). Подставив p из первого уравнения соотношения (2) во второе, находим, что $\hat{u}^2(\tau)=1$. Отсюда $\hat{u}(\tau)=1$ (ибо $\hat{u}\geqslant 0$), и тогда снова из первого уравнения (2) получаем равенство $\tau=-2p$.

После излома оптимальное решение удовлетворяет соотношению (1), из которого следует, что

$$t = -\frac{p(1+u^2)^2}{2u} = -\frac{p}{2}\left(\frac{1}{u} + 2u + u^3\right).$$

Но $\dfrac{dx}{dt} = u \Rightarrow \dfrac{dx}{du} = \dfrac{dx}{dt}\cdot\dfrac{dt}{du} = u\dfrac{dt}{du} = -\dfrac{p}{2}\left(-\dfrac{1}{u} + 2u + 3u^3\right)$. Интегрируя это соотношение с учетом равенства $\hat{x}(\tau)=0$, $\hat{u}(\tau)=1$, получаем параметрические уравнения искомой оптимальной кривой:

$$\hat{x} = -\frac{p}{2}\left(\ln\frac{1}{u} + u^2 + \frac{3}{4}u^4\right) + \frac{7}{8}p, \quad t = -\frac{p}{2}\left(\frac{1}{u} + 2u + u^3\right), \quad p<0.$$

Константа p определяется из начального условия $x(T_0)=\xi$. Эту кривую называют *кривой Ньютона*.

Покажем, что $\hat{x}$ доставляет абсолютный минимум в задаче. В силу оптимальности по u для любой допустимой функции $x \in PC^1([0, T_0])$, $x(0) = 0$, $x(T_0) = \xi$,

$$\frac{t}{1+\dot{x}^2(t)} - p\dot{x}(t) \geqslant \frac{t}{1+\dot{\hat{x}}^2(t)} - p\dot{\hat{x}}(t).$$

Интегрируя это соотношение и учитывая, что $\int_0^{T_0} \dot{x}(t)\,dt = \int_0^{T_0} \dot{\hat{x}}(t)\,dt = \xi$, получаем $\int_0^{T_0} \frac{t\,dt}{1+\dot{x}^2} \geqslant \int_0^{T_0} \frac{t\,dt}{1+\dot{\hat{x}}^2}$. Значит, $\hat{x} \in \mathrm{absmin}$.

Сопоставим полученное решение с решением, полученным Ньютоном. Обозначим $MN = t$, $BM = x$, $BG = \tau$, угол $BGP = \varphi$. Тогда из построения Ньютона имеем

$$\frac{BP}{BG} = \operatorname{tg}\varphi = \dot{x}(t) \Rightarrow BP = \tau\dot{x}, \quad GP^2 = BG^2 + BP^2 = (\dot{x}^2+1)\tau^2.$$

Таким образом, из пропорции Ньютона

$$\frac{MN}{GP} = \frac{GP^3}{4\,BP\,BG^2} \Leftrightarrow \frac{t}{(\dot{x}^2+1)^{1/2}\tau} = \frac{\tau^3(\dot{x}^2+1)^{3/2}}{4\tau\dot{x}\tau^2} \Leftrightarrow \frac{\dot{x}t}{(\dot{x}^2+1)^2} = \frac{\tau}{4}.$$

Но это — не что иное, как соотношение (1), в которое подставлено значение $p_0 = -\frac{\tau}{2}$. Отметим еще, что «затупленность» кривой и условие на скачок в точке $G = \tau$ (угол там равен 135°) были по существу предусмотрены Ньютоном в его «Поучении» об усеченном конусе.

3.3. Примеры задач оптимального управления

Пример 1.

$$\int_0^2 x\,dt \to \mathrm{extr}; \quad |\ddot{x}| \leqslant 2, \quad x(0) = \dot{x}(0) = \dot{x}(2) = 0.$$

Решение. Эту задачу можно свести к задаче оптимального управления, вводя вместо функции x вектор-функцию (x_1, x_2) и управление u и обозначения: $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $u = \ddot{x}$. Тогда наша задача сведется к задаче оптимального управления:

$$\int_0^2 x_1\,dt \to \mathrm{extr}; \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u,$$

$$u \in [-2, 2], \quad x_1(0) = x_2(0) = x_2(2) = 0.$$

Функция Лагранжа:

$$\Lambda = \int_0^2 \big(\lambda_0 x_1 + p_1(t)(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(t)(\dot{x}_2 - u)\big)\,dt + \lambda_1 x_1(0) + \lambda_2 x_2(0) + \lambda_3 x_2(2).$$

Необходимые условия:

a) система уравнений Эйлера для лагранжиана $L = \lambda_0 x_1 + p_1(t)\times(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(t)(\dot{x}_2 - u)$

$$\begin{cases} -\frac{d}{dt}L_{\dot{x}_1} + L_{x_1} = 0, \\ -\frac{d}{dt}L_{\dot{x}_2} + L_{x_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dot{p}_1 + \lambda_0 = 0, \\ -\dot{p}_2 - p_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1(t) = \lambda_0 t + C, \\ p_2(t) = -\lambda_0\frac{t^2}{2} - Ct + C'; \end{cases}$$

b) трансверсальность по x для терминанта $l = \lambda_1 x_1(0) + \lambda_2 x_2(0) + \lambda_3 x_2(2)$

$$L_{\dot{x}_1}(0) = l_{x_1(0)}, \quad L_{\dot{x}_1}(2) = -l_{x_1(2)} \iff p_1(0) = \lambda_1, \quad p_1(2) = 0,$$
$$L_{\dot{x}_2}(0) = l_{x_2(0)}, \quad L_{\dot{x}_2}(2) = -l_{x_2(2)} \iff p_2(0) = \lambda_2, \quad p_2(2) = -\lambda_3;$$

c) оптимальность по u

$$\min_{u\in[-2,2]}\{-p_2(t)u\} = -p_2(t)\hat{u}(t) \Rightarrow \hat{u}(t) = \begin{cases} 2\operatorname{sign} p_2(t), & p_2(t) \neq 0, \\ \text{любое из } [-2, 2], & p_2(t) = 0; \end{cases}$$

d) неотрицательность

$\lambda_0 \geqslant 0$ в задаче на минимум,
$\lambda_0 \leqslant 0$ в задаче на максимум.

Если $\lambda_0 = 0$, то из a) следует, что $p_1 = C$ и из b) $p_1 = 0$. Поэтому из a) $p_2 = C' \neq 0$, иначе все множители Лагранжа оказались бы нулями. Значит из c) $\hat{u} = 2$ или $\hat{u} = -2$, т.е. $\ddot{x} = 2$ или $\ddot{x} = -2$, откуда $x = t^2 + A_1 t + A_2$ или $x = -t^2 + B_1 t + B_2$. В обоих случаях не существует функции такого вида, удовлетворяющей условиям на концах $x(0) = \dot{x}(0) = \dot{x}(2) = 0$.

Полагаем $\lambda_0 = 1$ в задаче на минимум. Тогда из a) $p_1(t) = t + C$ и из b) $p_1(t) = t - 2$, далее из a) следует, что $p_2(t) = -\frac{(t-2)^2}{2} + C''$. Получили, что $p_2(t)$ — парабола с ветвями, направленными вниз и вершиной на оси $t = 2$, следовательно, $p_2(t)$ или не меняет свой знак на отрезке $[0, 2]$, или меняет его с минуса на плюс в некоторой точке $\tau \in (0, 2)$. И, значит, из c) оптимальное управление $\hat{u}$ на всем отрезке тождественно равняется двум или минус двум или меняет свое значение с минус двух на плюс два в некоторой точке τ. Но как мы уже выяснили в первых двух случаях функций, удовлетворяющих начальным условиям нет. Осталось рассмотреть случай

$$\hat{u} = \ddot{\hat{x}} = \begin{cases} -2, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 2, & \tau < t \leqslant 2. \end{cases}$$

Интегрируя это равенство, находим, что

$$\dot{\hat{x}} = \begin{cases} -2t + C_1, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 2t + C_2, & \tau < t \leqslant 2. \end{cases}$$

Из условий на концах $\dot{x}(0) = \dot{x}(2) = 0$

$$\dot{\hat{x}} = \begin{cases} -2t, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 2t - 4, & \tau < t \leqslant 2. \end{cases}$$

Поскольку функция должна быть непрерывной в точке τ, то $-2\tau = 2\tau - 4$, откуда $\tau = 1$. Интегрируя еще раз, получаем

$$\hat{x} = \begin{cases} -t^2 + C_1, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ t^2 - 4t + C_2, & 1 \leqslant t \leqslant 2. \end{cases}$$

Из начального условия $x(0) = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0$ и условия непрерывности в точке $\tau = 1$: $-1 = 1 - 4 + C_2 \Leftrightarrow C_2 = 2$ находим допустимую экстремаль

$$\hat{x} = \begin{cases} -t^2, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ t^2 - 4t + 2, & 1 \leqslant t \leqslant 2. \end{cases}$$

Докажем с помощью непосредственной проверки, что функция $\hat{x}$ доставляет абсолютный минимум в задаче. Возьмем функцию $h \in PC^2([0, 2])$ такую, чтобы $\hat{x} + h$ была допустимой в задаче. Для этого надо взять функцию h, для которой $|\ddot{\hat{x}} + \ddot{h}| \leqslant 2$, $h(0) = \dot{h}(0) = \dot{h}(2) = 0$.

Имеем для функционала $I(x(\cdot)) = \int\limits_0^2 x\,dt$

$$I(\hat{x}+h) - I(\hat{x}) = \int\limits_0^2 (\hat{x}+h)\,dt - \int\limits_0^2 \hat{x}\,dt = \int\limits_0^2 h\,dt = -\int\limits_0^2 \dot{p}_2 h\,dt = -\int\limits_0^2 h\,dp_2.$$

Интегрируя по частям дважды с учетом условий $h(0) = \dot{h}(0) = \dot{h}(2) = 0$, $p_2(2) = 0$, получим

$$I(\hat{x} + h) - I(\hat{x}) = \int\limits_0^2 \dot{h} p_2\,dt - h p_2\Big|_0^2 = \int\limits_0^2 \dot{h}\,dp_2 =$$

$$= \dot{h} p_2\Big|_0^2 - \int\limits_0^2 \ddot{h} p_2\,dt = -\int\limits_0^2 \ddot{h} p_2\,dt.$$

Разбивая отрезок интегрирования на два и учитывая, что

$$\begin{cases} \ddot{h} \geqslant 0, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ \ddot{h} \leqslant 0, & 1 \leqslant t \leqslant 2, \end{cases} \quad \text{а} \quad \begin{cases} p_2 \leqslant 0, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ p_2 \geqslant 0, & 1 \leqslant t \leqslant 2, \end{cases}$$

имеем

$$I(\hat{x} + h) - I(\hat{x}) = -\int\limits_0^1 \ddot{h} p_2\,dt - \int\limits_1^2 \ddot{h} p_2\,dt \geqslant 0.$$

Таким образом, $\hat{x} \in \text{absmin}$.

При этом

$$S_{\min} = I(\hat{x}(\cdot)) = \int\limits_0^2 \hat{x}\,dt = \int\limits_0^1 -t^2\,dt + \int\limits_1^2 (t^2 - 4t + 2)\,dt =$$

$$= -\frac{t^3}{3}\Big|_0^1 + \left(\frac{t^3}{3} - 2t^2 + 2t\right)\Big|_1^2 = -\frac{1}{3} + \frac{8}{3} - 8 + 4 - \frac{1}{3} + 2 - 2 = -2.$$

Ясно, что при решении задачи на максимум $-\hat{x} \in \text{absmax}$, $S_{\max} = 2$, так как функционал $I(x)$ является нечетной функцией относительно x, а множество допустимых функций симметрично относительно нуля.

Пример 2.

$$T \to \min; \quad -1 \leqslant \ddot{x} \leqslant 3, \quad x(0) = 1, \quad x(T) = -1, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(T) = 0.$$

Решение. Приведем задачу к виду задач оптимального управления, вводя вместо функции x вектор-функцию (x_1, x_2), управление u и обозначения: $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $u = \ddot{x}$,

$$T \to \min; \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad u \in [-1, 3],$$
$$x_1(0) = 1, \quad x_1(T) = -1, \quad x_2(0) = x_2(T) = 0.$$

Функция Лагранжа:

$$\Lambda = \int_0^T \big(p_1(t)(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(t)(\dot{x}_2 - u)\big)\,dt +$$
$$+ \lambda_0 T + \lambda_1\big(x_1(0) - 1\big) + \lambda_2 x_2(0) + \lambda_3\big(x_1(T) + 1\big) + \lambda_4 x_2(T).$$

Необходимые условия:

a) система уравнений Эйлера для лагранжиана $L = p_1(t)(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(t)(\dot{x}_2 - u)$

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dt}L_{\dot{x}_1} + L_{x_1} = 0, \\ -\dfrac{d}{dt}L_{\dot{x}_2} + L_{x_2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\dot{p}_1 = 0, \\ -\dot{p}_2 - p_1 = 0 \end{cases} \iff p_2(t) = C_1 t + C_2;$$

b) трансверсальность по x для терминанта $l = \lambda_0 T + \lambda_1(x_1(0) - 1) + \lambda_2 x_2(0) + \lambda_3(x_1(T) + 1) + \lambda_4 x_2(T)$

$$L_{\dot{x}_1}(0) = l_{x_1(0)}, \quad L_{\dot{x}_1}(T) = -l_{x_1(T)} \iff p_1(0) = \lambda_1, \quad p_1(T) = -\lambda_3,$$
$$L_{\dot{x}_2}(0) = l_{x_2(0)}, \quad L_{\dot{x}_2}(T) = -l_{x_2(T)} \iff p_2(0) = \lambda_2, \quad p_2(T) = -\lambda_4;$$

c) оптимальность по u

$$\min_{u\in[-1,3]}\{-p_2(t)u\} = -p_2(t)\hat{u}(t) \Rightarrow \hat{u}(t) = \begin{cases} -1, & p_2(t) < 0, \\ 3, & p_2(t) > 0, \\ \text{любое из } [-1, 3], & p_2(t) = 0; \end{cases}$$

d) стационарность по T: $\Lambda_T(T) = 0 \iff \lambda_0 + \lambda_3 \dot{x}_1(T) + \lambda_4 \dot{x}_2(T) = 0$;

e) неотрицательность: $\lambda_0 \geqslant 0$.

Учитывая то, что из начального условия следует $\dot{x}_1(T) = 0$, а из b) $\lambda_4 = -p_2(T)$, получаем, что d) равносильно условию $\lambda_0 = p_2(T)\hat{u}(T)$.

Поэтому если $\lambda_0 = 0$, то $p_2(T) = 0$ либо $\hat{u}(T) = 0$, но отсюда из c) вновь $p_2(T) = 0$. При этом p_2 не может быть тождественным нулем, ибо иначе все множители Лагранжа были бы нулями. Значит, из a) $p_2(t) = C(t - T)$, $C \neq 0$, а тогда из c) следует, что $\hat{u}(t) \equiv -1$ или $\hat{u}(t) \equiv 3$,

т. е. $\ddot{\hat{x}} = -1$ или $\ddot{\hat{x}} = 3$, откуда $x = -\frac{t^2}{2} + A_1 t + A_2$ или $x = 3\frac{t^2}{2} + B_1 t + B_2$. В обоих случаях не существует функции такого вида, удовлетворяющей условиям на концах $x(0) = 1$, $x(T) = -1$, $\dot{x}(0) = \dot{x}(T) = 0$. Таким образом, в случае $\lambda_0 = 0$ нет допустимых экстремалей.

Полагаем $\lambda_0 = 1$. В силу условий п. a) p_2 — линейная функция, не тождественно равная нулю. Значит p_2 может менять свой знак на отрезке $[0, T]$ не более одного раза. Причем, если функция p_2 не меняет свой знак на $[0, T]$, то $\hat{u}(t) \equiv -1$ или $\hat{u}(t) \equiv 3$. В обоих случаях мы уже проверили, что нет допустимых экстремалей.

Поэтому p_2 меняет знак на $[0, T]$ ровно один раз в некоторой точке $\tau \in (0, 2)$. Получаем две возможности:

$$\hat{u} = \ddot{\hat{x}} = \begin{cases} 3, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ -1, & \tau < t \leqslant T, \end{cases} \quad \text{или} \quad \hat{u} = \ddot{\hat{x}} = \begin{cases} -1, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 3, & \tau < t \leqslant T. \end{cases}$$

Первый случай невозможен, так как тогда параболы с заданными условиями на концах не пересекаются. Интегрируя второе равенство, находим, что

$$\dot{\hat{x}} = \begin{cases} -t + C_1, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 3t + C_2, & \tau < t \leqslant T. \end{cases}$$

Из условий на концах $\dot{x}(0) = \dot{x}(T) = 0$ имеем

$$\dot{\hat{x}} = \begin{cases} -t, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 3(t - T), & \tau < t \leqslant T. \end{cases}$$

Поскольку $\hat{x} \in PC^2([0, T])$, то функция $\dot{\hat{x}}$ должна быть непрерывной в точке τ, поэтому $-\tau = 3(\tau - T)$, откуда $\tau = \frac{3T}{4}$. Отсюда

$$\hat{x} = \begin{cases} -\dfrac{t^2}{2} + C, & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{3T}{4}, \\ \dfrac{3(t - T)^2}{2} + D, & \dfrac{3T}{4} \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$

Из начальных условий $x(0) = 1$, $x(T) = -1$ следует, что $C = 1$, $D = -1$, а из условия непрерывности в точке $\tau = \frac{3T}{4}$: $-\frac{9T^2}{32} + 1 = \frac{3T^2}{32} - 1$ находим, что $T = \frac{4}{\sqrt{3}}$. Таким образом, имеется единственная допустимая экстремаль

$$\hat{x} = \begin{cases} -\dfrac{t^2}{2} + 1, & 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{3}, \\ \dfrac{3(t - 4/\sqrt{3})^2}{2} - 1, & \sqrt{3} \leqslant t \leqslant \dfrac{4}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Аналогично тому, как это было сделано в простейшей задаче быстродействия, можно показать, что $\hat{x} \in \text{absmin}$, т. е. найденное значение $\widehat{T} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ доставляет абсолютный минимум в задаче.

3.4. Задачи оптимального управления

3.1. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\sin t\,dt \to \mathrm{extr};\quad |\dot x| \leqslant 1,\quad x(-\pi) = x(\pi) = 0.$

3.2. $\displaystyle\int_{0}^{7\pi/4} x\sin t\,dt \to \mathrm{extr};\quad |\dot x| \leqslant 1,\quad x(0) = 0.$

3.3. $\displaystyle\int_{0}^{4} (\dot x^2 + x)\,dt \to \mathrm{extr};\quad |\dot x| \leqslant 1,\quad x(4) = 0.$

3.4. $\displaystyle\int_{0}^{2} x\,dt \to \mathrm{extr};\quad |\ddot x| \leqslant 2,\quad x(0) + x(2) = 0,\quad \dot x(0) = 0.$

3.5. $\displaystyle\int_{0}^{4} x\,dt \to \mathrm{extr};\quad |\ddot x| \leqslant 2,\quad x(0) + x(4) = 0,\quad \dot x(0) = \dot x(4) = 0.$

3.6. $T \to \min;\quad |\ddot x| \leqslant 2,\quad x(-1) = 1,\quad x(T) = -1,\quad \dot x(-1) = \dot x(T) = 0.$

3.7. $T \to \min;\quad -3 \leqslant \ddot x \leqslant 1,\quad x(0) = 3,\quad x(T) = -5,\quad \dot x(0) = \dot x(T) = 0.$

3.8. $T \to \min;\quad 0 \leqslant \ddot x \leqslant 1,\quad x(0) = \xi_1,\quad \dot x(0) = \xi_2,\quad x(T) = \dot x(T) = 0.$

3.9. $\displaystyle\int_{0}^{2} |\ddot x|\,dt \to \min;\quad \ddot x \geqslant -2,\quad x(0) = 0,\quad x(2) = -1,\quad \dot x(2) = -2.$

3.10. $\displaystyle\int_{0}^{2} |\ddot x|\,dt \to \min;\quad \ddot x \leqslant 2,\quad x(0) = 0,\quad x(2) = 1,\quad \dot x(2) = 2.$

3.11. $\displaystyle\int_{0}^{1} \ddot x^2\,dt \to \min;\quad \ddot x \leqslant 24,\quad x(0) = 11,\quad x(1) = \dot x(1) = 0.$

3.12. $\displaystyle\int_{0}^{2} \ddot x^2\,dt \to \min;\quad \ddot x \geqslant 6,\quad x(0) = \dot x(0) = 0,\quad x(2) = 17.$

3.13. $\displaystyle\int_{0}^{1} \ddot x^2\,dt \to \min;\quad |\ddot x| \leqslant 1,\quad x(0) = \dot x(0) = 0,\quad x(1) = -\frac{11}{24}.$

3.14. $\displaystyle\int_{0}^{1} \left(\frac{\dot x^2 + x^2}{2} + |\dot x|\right) dt \to \mathrm{extr};\quad x(1) = \xi.$

Ответы к задачам главы 4

1. $\hat x = \begin{cases} \pi + t, & -\pi \leqslant t \leqslant -\frac{\pi}{2}, \\ -t, & -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ t - \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \pi, \end{cases} \in \mathrm{absmin},\quad S_{\min} = -4,\quad -\hat x \in \mathrm{absmax};$ $S_{\max} = 4.$

2. $\hat x = \begin{cases} -t, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{4}, \\ t - \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{4} \leqslant t \leqslant 7\frac{\pi}{4}, \end{cases} \in \mathrm{absmin};\ -\hat x \in \mathrm{absmax}.$

3. $\begin{cases} \frac{t^2}{4} - 3, & 0 \leqslant t \leqslant 2, \\ t - 4, & 2 \leqslant t \leqslant 4, \end{cases} \in \mathrm{absmin};\ 4 - t \in \mathrm{absmax}.$

4. $\hat x = t^2 - 2 \in \mathrm{absmin};\ S_{\min} = -\frac{4}{3},\ -\hat x \in \mathrm{absmax};\ S_{\max} = \frac{4}{3}.$

5. $\hat x = \begin{cases} -t^2, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ (t-2)^2 - 2, & 1 \leqslant t \leqslant 3, \\ -(t-4)^2, & 3 \leqslant t \leqslant 4, \end{cases} \in \mathrm{absmin};\ -\hat x \in \mathrm{absmax}.$

6. $\left(\hat x = \begin{cases} -t^2 - 2t, & -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ t^2 - 2t, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}\ \widehat T = 1\right) \in \mathrm{absmin};\ S_{\min} = 1.$

7. $\left(\hat x = \begin{cases} -\frac{3t^2}{2} + 3, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{2}{\sqrt3}, \\ \frac{(t-\widehat T)^2}{2} - 5, & \frac{2}{\sqrt3} \leqslant t \leqslant \frac{8}{\sqrt3}, \end{cases}\ \widehat T = \frac{8}{\sqrt3}\right) \in \mathrm{absmin};\ S_{\min} = \frac{8}{\sqrt3}.$

8. Допустимые экстремали существуют при $\xi_1 \geqslant \frac{\xi_2^2}{2}$, $\xi_2 < 0$; $S_{\min} = -\frac{\xi_2^2 + 2\xi_1}{2\xi_2}$, $\left(\hat x = \begin{cases} \xi_2 t + \xi_1, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ \frac{(t-\widehat T)^2}{2}, & \tau \leqslant t \leqslant \widehat T, \end{cases}\ \tau = \frac{\xi_2^2 - 2\xi_1}{2\xi_2},\ \widehat T = -\frac{\xi_2^2 + 2\xi_1}{2\xi_2}\right) \in \mathrm{absmin}.$

9. $\hat x = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ -(t-1)^2, & 1 \leqslant t \leqslant 2, \end{cases} \in \mathrm{absmin};\ S_{\min} = 1.$

10. $\hat x = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ (t-1)^2, & 1 \leqslant t \leqslant 2, \end{cases} \in \mathrm{absmin};\ S_{\min} = 1.$

11. $\hat x = \begin{cases} 8t^3 - 18t + 11, & 0 \leqslant t \leqslant \frac12, \\ 12(t-1)^2, & \frac12 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \in \mathrm{absmin}.$

12. $\hat x = \begin{cases} -t^3 + 6t^2, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 3t^2 + 3t - 1, & 1 \leqslant t \leqslant 2, \end{cases} \in \mathrm{absmin}.$

13. $\hat x = \begin{cases} -\frac{t^2}{2}, & 0 \leqslant t \leqslant \frac12, \\ \frac{t^3}{3} - t^2 + \frac{t}{4} - \frac{1}{24}, & \frac12 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \in \mathrm{absmin};\ S_{\min} = \frac23.$

14. $|\xi| \leqslant 1 \Rightarrow \hat x = \xi \in \mathrm{absmin};\qquad |\xi| > 1 \Rightarrow \hat x = \begin{cases} C, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{|C|}, \\ C\,\mathrm{ch}\left(t - \frac{1}{C}\right), & \frac{1}{|C|} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \in$ absmin, где константа C отыскивается из граничного условия на правом конце: $C\,\mathrm{ch}\left(1 - \frac{1}{|C|}\right) = \xi$, $S_{\max} = +\infty$ $(x_n(t) = n(t-1) + \xi)$.

Глава 5

Условия второго порядка в вариационном исчислении

В этой главе даны необходимые и достаточные условия экстремума в простейшей задаче вариационного исчисления. Это классические условия — условия Лежандра, Якоби, Вейерштрасса и другие. Причем эти условия будут выведены как следствия принципа максимума. Условие Вейерштрасса будет также выведено без принципа максимума с помощью игольчатых вариаций. При выводе достаточных условий в простейшей задаче вариационного исчисления будет строиться поле экстремалей, выводиться основная формула Вейерштрасса. Формулируется и доказывается отдельно теорема о необходимых и достаточных условиях экстремума в простейшей задаче вариационного исчисления с квадратичным функционалом. Аналогичные необходимые и достаточные условия экстремума могут быть получены и в других задачах (Больца, изопериметрической задаче, задаче со старшими производными).

§ 1. Простейшая задача вариационного исчисления

Рассмотрим простейшую задачу вариационного исчисления (для определенности задачу на минимум)

$$I(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \to \inf; \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1. \qquad (P)$$

1.1. Сильный и слабый экстремум

Задачу (P) мы рассматривали на слабый экстремум. Иногда чтобы подчеркнуть, что задача рассматривается на слабый экстремум, мы будем писать $P(W)$. Множество допустимых элементов в задаче на слабый экстремум $D(P(W))$ составляют непрерывно дифференцируемые функции класса $C^1([t_0, t_1])$ с заданными условиями на концах.

Напомним, что функция $\hat{x} \in D(P(W))$ доставляет *слабый локальный минимум* в задаче (P) ($\hat{x} \in \operatorname{wlocmin} P$), если она доставляет локальный минимум в пространстве $C^1([t_0, t_1])$, т.е. если существует $\delta > 0$ такое, что $I(x) \geqslant I(\hat{x})$ для любой функции $x \in D(P(W))$, для которой $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C^1([t_0,t_1])} < \delta$.

Наряду со слабым экстремумом простейшую задачу КВИ будем рассматривать на сильный экстремум $P(S)$ (буква S — начальная буква слова strong — сильный). Множество допустимых элементов в задаче на сильный экстремум $D(P(S))$ составляют кусочно-дифференцируемые функции класса $PC^1([t_0, t_1])$ с заданными условиями на концах.

Функция $\hat{x} \in D(P(S))$ доставляет *сильный локальный минимум* в задаче (P) ($\hat{x} \in \operatorname{strlocmin} P$), если она доставляет локальный минимум в пространстве $C([t_0, t_1])$, т.е. если существует $\delta > 0$ такое, что $I(x) \geqslant I(\hat{x})$ для любой функции $x \in D(P(S))$, для которой $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C([t_0,t_1])} < \delta$.

Так как множество функций, среди которых доставляется сильный экстремум, шире, чем для слабого экстремума, то если функция $\hat{x} \in C^1([t_0, t_1])$ доставляет сильный, то она доставляет и слабый экстремум. Поэтому для функций $\hat{x} \in C^1([t_0, t_1])$ необходимое условие слабого экстремума является необходимым условием сильного, а достаточное условие сильного экстремума является достаточным условием слабого.

1.2. Пример слабого, но не сильного экстремума

Приведем пример задачи, в которой допустимая экстремаль доставляет слабый локальный минимум, но не доставляет сильного локального минимума

$$\int_0^1 \dot{x}^3\, dt \to \inf; \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1.$$

Необходимое условие слабого, а значит и сильного экстремума — уравнение Эйлера:

$$-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}} + L_x = 0 \iff \frac{d}{dt} 3\dot{x}^2 = 0 \iff 3\dot{x}^2 = C \iff \dot{x} = \text{const}.$$

Общее решение уравнения Эйлера: $x = C_1 t + C_2$. Из условий на концах находим, что $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. Таким образом, имеется единственная допустимая экстремаль $\hat{x} = t$. Покажем, что она доставляет слабый локальный минимум в задаче ($\hat{x} \in \operatorname{wlocmin}$). Действительно, если $h \in C_0^1([0, 1])$, то для функционала $I(x) = \int_0^1 \dot{x}^3\, dt$ имеем

$$I(\hat{x} + h) - I(\hat{x}) = \int_0^1 (1 + \dot{h})^3\, dt - \int_0^1 1^3\, dt = \int_0^1 \dot{h}^2 (3 + \dot{h})\, dt. \qquad (*)$$

Отсюда видно, что если $\|h\|_1 < 3$, то $3+\dot{h}(t) > 0$ и, значит, $I(\hat{x}+h) \geqslant I(\hat{x})$, т. е. $\hat{x} \in \mathrm{wlocmin}$.

Покажем, что $\hat{x}$ не доставляет сильного локального экстремума ($\hat{x} \notin \mathrm{strlocmin}$). Рассмотрим последовательность функций h_n $(n > 1)$ такую, что

$$\dot{h}_n(t) = \begin{cases} -\sqrt{n}, & t \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \\ 0, & t \in \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right), \\ \frac{2}{\sqrt{n}}, & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Тогда

$$h_n(t) = \int_0^t \dot{h}_n(\tau)\,d\tau = \begin{cases} -\sqrt{n}t, & t \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \\ -\frac{1}{\sqrt{n}}, & t \in \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right), \\ \frac{2t}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n}}, & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Легко понять, что $h_n \in PC_0^1([0,1])$ и $\|h_n\|_0 \to 0$ при $n \to \infty$. Положим $x_n = \hat{x} + h_n$. Получим последовательность допустимых (в задаче на сильный экстремум) функций x_n, $x_n(\cdot) \to \hat{x}(\cdot)$ в метрике пространства $C([0,1])$, для которых в силу $(*)$

$$I(x_n) - I(\hat{x}) = \int_0^1 \dot{h}_n^2(3+\dot{h}_n)\,dt = \int_0^{1/n} n(3-\sqrt{n})\,dt + \int_{1/2}^1 \frac{4}{n}\left(3+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)dt =$$

$$= 3 - \sqrt{n} + \frac{6}{n} + \frac{4}{n\sqrt{n}} \to -\infty,$$

при $n \to \infty$, т. е. функция $\hat{x}$ не доставляет сильного локального минимума ($\hat{x} \notin \mathrm{strlocmin}$), более того $S_{\mathrm{strabsmin}} = -\infty$.

Ниже в п. 1.4.3 в лемме о скруглении углов покажем, что функция класса C^1, доставляющая абсолютный слабый экстремум, доставляет и сильный, т. е. $S_{\mathrm{strabsmin}\,P} = S_{\mathrm{wabsmin}\,P}$.

В нашей задаче можно было построить последовательность допустимых функций $\tilde{x}_n$ класса C^1 такую, что $I(\tilde{x}_n) \to -\infty$, т. е. сгладить функции x_n.

1.3. Условия Лежандра, Якоби, Вейерштрасса

Рассмотрим простейшую задачу вариационного исчисления, для определенности задачу на минимум

$$I(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\,dt \to \inf; \; x(t_0) = x_0, \; x(t_1) = x_1. \qquad (P)$$

Пусть $\hat{x} \in C^1([t_0, t_1])$ — некоторая фиксированная допустимая ($\hat{x}(t_0) = x_0$, $\hat{x}(t_1) = x_1$) экстремаль (т. е. $\hat{x}$ удовлетворяет уравнению Эйлера). Далее предполагаем, что интегрант L по меньшей мере дважды непрерывно дифференцируем в некоторой окрестности траектории $\hat{x}$.

Возьмем функцию $h \in C_0^1([t_0, t_1])$. Пусть $\hat{x} \in \mathrm{wlocmin}\,P$, тогда функция одного переменного

$$\varphi(\lambda) = I(\hat{x}(\cdot) + \lambda h(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L\big(t, \hat{x}(t) + \lambda h(t), \dot{\hat{x}}(t) + \lambda \dot{h}(t)\big)\,dt$$

имеет минимум при $\lambda = 0$. Из условий, наложенных на гладкость функции L следует, что функция $\varphi(\lambda)$ дважды дифференцируема в нуле. Поэтому по необходимому условию минимума первого порядка (по теореме Ферма) $\varphi'(0) = 0$, т. е.

$$\varphi'(0) = \int_{t_0}^{t_1} \Big(\widehat{L}_{\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \widehat{L}_x(t)h(t)\Big)\,dt = 0 \quad \forall\, h \in C_0^1([t_0, t_1]). \qquad (1)$$

В главе 3 п. 1.3 было показано, что из соотношения (1) следует уравнение Эйлера — необходимое условие экстремума первого порядка.

По необходимому условию минимума второго порядка для функции одной переменной $\varphi''(0) \geqslant 0$, т. е.

$$\varphi''(0) = \int_{t_0}^{t_1} \big(\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{h}^2(t) + 2\widehat{L}_{x\dot{x}}(t)\dot{h}(t)h(t) + \widehat{L}_{xx}(t)h^2(t)\big)\,dt \geqslant 0$$

$$\forall\, h \in C_0^1([t_0, t_1]). \qquad (2)$$

Из соотношения (2) выводятся условия второго порядка для простейшей задачи классического вариационного исчисления. Важную роль играет коэффициент $\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)$ при $\dot{h}^2$.

Говорим, что на экстремали $\hat{x}$ выполнено *условие Лежандра*, если $\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) \geqslant 0 \ \forall\ t \in [t_0, t_1]$ и *усиленное условие Лежандра*, если $\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) > 0 \ \forall\ t \in [t_0, t_1]$.

В векторном случае $x = (x_1, \dots, x_n) \in C^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$,

$$L_{\dot{x}\dot{x}} = \begin{pmatrix} L_{\dot{x}_1\dot{x}_1} & \dots & L_{\dot{x}_1\dot{x}_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{\dot{x}_n\dot{x}_1} & \dots & L_{\dot{x}_n\dot{x}_n} \end{pmatrix}, \qquad L_{\dot{x}x} = \begin{pmatrix} L_{\dot{x}_1x_1} & \dots & L_{\dot{x}_1x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{\dot{x}_nx_1} & \dots & L_{\dot{x}_nx_n} \end{pmatrix},$$

$$L_{x\dot{x}} = \begin{pmatrix} L_{x_1\dot{x}_1} & \dots & L_{x_1\dot{x}_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{x_n\dot{x}_1} & \dots & L_{x_n\dot{x}_n} \end{pmatrix}, \qquad L_{xx} = \begin{pmatrix} L_{x_1x_1} & \dots & L_{x_1x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{x_nx_1} & \dots & L_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

— матрицы размера $n \times n$. Условие $\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) \geqslant 0$ означает неотрицательную определенность матрицы, условие $\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) > 0$ — положительную определенность матрицы. Соотношение (2) можно переписать в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} \Big(\langle \widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}\dot{h}, \dot{h} \rangle + 2\langle \widehat{L}_{x\dot{x}}\dot{h}, h \rangle + \langle \widehat{L}_{xx}h, h \rangle \Big)\, dt \geqslant 0$$

$$\forall\ h \in C_0^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n). \tag{2}$$

Отметим, что матрица $\widehat{L}_{\dot{x}x}(t)$ является транспонированной к матрице $\widehat{L}_{x\dot{x}}(t)$ и $\langle \widehat{L}_{x\dot{x}}\dot{h}, h \rangle = \langle \dot{h}, \widehat{L}^*_{x\dot{x}}h \rangle = \langle \dot{h}, \widehat{L}_{\dot{x}x}h \rangle$.

Пусть далее $\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}, \widehat{L}_{\dot{x}x}, \widehat{L}_{xx} \in C^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^{n^2})$ и выполнено усиленное условие Лежандра.

Уравнение Эйлера по h $\quad -\dfrac{d}{dt}\widetilde{L}_{\dot{h}}(t) + \widetilde{L}_h(t) = 0$ для интегранта $\widetilde{L} = \widetilde{L}(t, h, \dot{h}) := \widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{h}^2(t) + 2\widehat{L}_{x\dot{x}}(t)\dot{h}(t)h(t) + \widehat{L}_{xx}(t)h^2(t)$, т. е. уравнение

$$-\frac{d}{dt}\big(\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \widehat{L}_{\dot{x}x}(t)h(t)\big) + \widehat{L}_{x\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \widehat{L}_{xx}(t)h(t) = 0$$

называется *уравнением Якоби* для исходной задачи на экстремали $\hat{x}$.

Точка τ называется *сопряженной к точке* t_0, если для решения уравнения Якоби $h(\cdot)$ с начальными данными $h(t_0) = 0$, $\dot{h}(t_0) = 1$, функция h в точке τ обращается в ноль ($h(\tau) = 0$). Говорят, что на $\hat{x}$ выполнено *условие Якоби*, если в интервале (t_0, t_1) нет точек, сопряженных с t_0, и *усиленное условие Якоби*, если в полуинтервале $(t_0, t_1]$ нет точек, сопряженных с t_0.

Уравнение Якоби — линейное дифференциальное уравнение второго порядка, которое (из-за усиленного условия Лежандра) можно разрешить относительно второй производной.

Для вектор-функций $x = (x_1, \dots, x_n)$ ищется фундаментальная система решений уравнения Якоби — матрица $H(t) = \big(h^1(t) \dots h^n(t)\big) =$

$\begin{pmatrix} h_1^1(t) & \dots & h_1^n(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ h_n^1(t) & \dots & h_n^n(t) \end{pmatrix}$ с начальными условиями $H(t_0) = 0$ (нулевая матрица), $\dot{H}(t_0) = I$ (единичная матрица) или $\det \dot{H}(t_0) \neq 0$. Вектор-столбцы $h^i = \begin{pmatrix} h_1^i \\ \dots \\ h_n^i \end{pmatrix}$ — решения системы уравнений Якоби.

Пусть $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ — дифференцируемая функция n переменных. Функцию

$$\mathcal{E}(x, x') := f(x') - f(x) - f'(x)(x' - x)$$

назовем *функцией Вейерштрасса* функции f. Геометрический смысл $\mathcal{E}$ таков: $\mathcal{E}(x, x')$ — разность в точке x' между значением f и значением аффинной функции, касательной к графику f в точке x. Отсюда ясно, что если f выпукла, то $\mathcal{E}(x, x') \geqslant 0$. Можно показать, что верно и обратное.

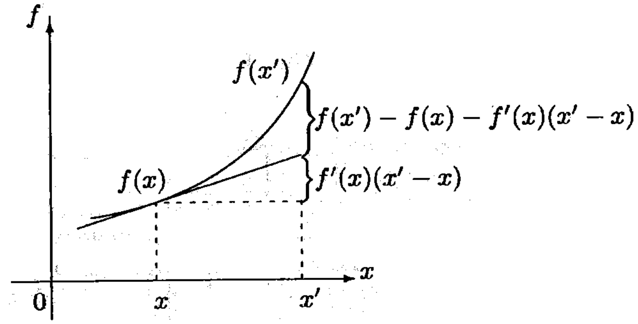


Рис. 11.

Пусть L — интегрант функционала I простейшей задачи классического вариационного исчисления. Функция

$$\mathcal{E}(t, x, \dot{x}, u) := L(t, x, u) - L(t, x, \dot{x}) - L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x})(u - \dot{x})$$

называется *функцией Вейерштрасса* интегранта L. Таким образом, $\mathcal{E}(t, x, \dot{x}, u)$ — функция Вейерштрасса функции $\dot{x} \to L(t, x, \dot{x})$, где t, x играют роль параметров. Говорят, что на экстремали $\hat{x}$ выполнено *условие Вейерштрасса*, если

$$\mathcal{E}(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}, u) = L(t, \hat{x}, u) - L(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}) - \widehat{L}_{\dot{x}}(t)(u - \dot{\hat{x}}) \geqslant 0 \ \forall\ u \in \mathbf{R}^n\ \forall\ t \in [t_0, t_1].$$

Геометрический смысл условия Вейерштрасса на экстремали $\hat{x}$: для любого фиксированного $t \in [t_0, t_1]$ график функции $L = L(\dot{x}) = L(t, \hat{x}(t), \dot{x})$ (как функции от $\dot{x}$) лежит выше касательной к кривой L в точке $\dot{\hat{x}}(t)$.

1.4. Необходимые и достаточные условия слабого и сильного экстремума

Рассмотрим простейшую задачу классического вариационного исчисления для вектор-функций $x = (x_1, \dots, x_n)$ (для определенности задачу на минимум)

$$I(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \to \inf; \ x(t_0) = x_0, \ x(t_1) = x_1. \qquad (P)$$

1.4.1. Игольчатые вариации. Условие Вейерштрасса

Понятие сильного экстремума ввел в вариационное исчисление Вейерштрасс. Для доказательства необходимого условия сильного минимума Вейерштрасс употребил специальные вариации экстремальной функции $\hat{x}$ вида $x_\lambda(t) = \hat{x}(t) + h_\lambda(t)$, где $\lambda \geqslant 0$,

$$h_\lambda(t) = h_\lambda(t; \tau, \xi) = \begin{cases} \xi\lambda + (t-\tau)\xi, & t \in [\tau - \lambda, \tau], \\ \xi\lambda - (t-\tau)\xi\sqrt{\lambda}, & t \in [\tau, \tau + \sqrt{\lambda}], \end{cases} \qquad (\xi \in \mathbf{R}^n).$$

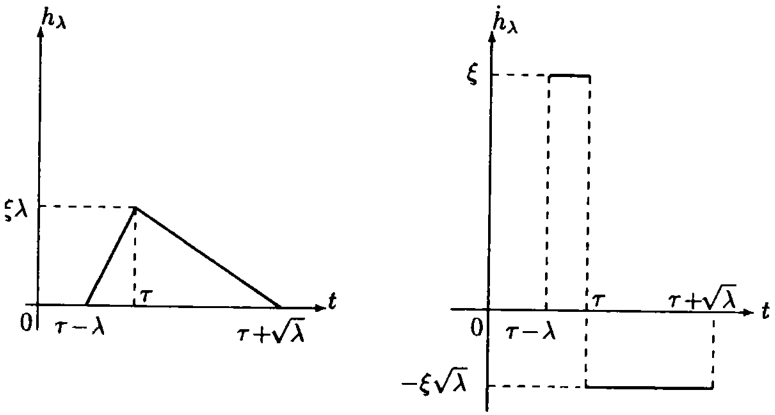


Рис. 12.

Производная вариации $h_\lambda(t)$ имеет вид, изображенный на рис. (для удобства изображения взято $n = 1$, $\xi > 0$). Она несколько напоминает иголку, в связи с чем подобные вариации называют «игольчатыми». Такие вариации приспособлены к исследованию задач на сильный экстремум. Игольчатые вариации несколько иного вида использовались при доказательстве принципа максимума Понтрягина.

Очевидно, что $x_\lambda(\cdot) \to \hat{x}(\cdot)$ в метрике пространства $C([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ при $\lambda \to 0$.

С помощью игольчатых вариаций докажем условие Вейерштрасса — необходимое условие сильного минимума в простейшей задаче вариационного исчисления на классе кусочно-гладких функций.

Теорема. *Пусть функция* $\hat{x} \in C^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ *доставляет сильный локальный минимум в задаче* (P) $(\hat{x} \in \operatorname{strlocmin} P)$, *и интегрант* L *непрерывно дифференцируем в некоторой окрестности расширенного графика* $\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}} = \{(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \mid t \in [t_0, t_1]\}$ $(L \in C^1(\mathcal{O}(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}})))$.

Тогда на $\hat{x}$ *выполняется условие Вейерштрасса*

$$E(\tau, \hat{x}(\tau), \dot{\hat{x}}(\tau), \dot{\hat{x}}(\tau) + \xi) := L(\tau, \hat{x}(\tau), \dot{\hat{x}}(\tau) + \xi) - L(\tau, \hat{x}(\tau), \dot{\hat{x}}(\tau)) - \\ - \xi L_{\dot{x}}(\tau, \hat{x}(\tau), \dot{\hat{x}}(\tau)) \geqslant 0 \quad \forall\, \xi \in \mathbf{R}^n, \ \forall\, \tau \in [t_0, t_1].$$

Нетрудно видеть, что выписанное условие Вейерштрасса является тем же самым, что и в п. 1.3:

$$E(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), u) = L(t, \hat{x}(t), u) - L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) - \widehat{L}_{\dot{x}}(t)(u - \dot{\hat{x}}(t)) \geqslant 0 \\ \forall\, u \in \mathbf{R}^n, \ \forall\, t \in [t_0, t_1],$$

где $t = \tau$, $u = \dot{\hat{x}}(\tau) + \xi$.

Доказательство. Для простоты записи проведем доказательство для $n = 1$. Возьмем точку $\tau \in (t_0, t_1)$ (случаи $\tau = t_0, t_1$ доказываются предельными переходами $\tau \to t_0$, $\tau \to t_1$). Рассмотрим выписанную выше игольчатую вариацию $x_\lambda(t) = \hat{x}(t) + h_\lambda(t)$ функции $\hat{x}$. При достаточно малых $\lambda \geqslant 0$ функция x_λ допустима в задаче (P): $x_\lambda \in PC^1([t_0, t_1])$, $x_\lambda(t_i) = \hat{x}(t_i) + h_\lambda(t_i) = x_i$, $i = 0, 1$. Отметим, что

$$\|h_\lambda(\cdot)\|_{C([t_0, t_1])} = \lambda|\xi|,$$

$$|\dot{h}_\lambda(t)| = \sqrt{\lambda}|\xi| \quad \forall\, t \in (\tau, \tau + \sqrt{\lambda}).$$

Поскольку функции $\hat{x}(t)$ и $x_\lambda(t)$ совпадают при $t \in [t_0, \tau - \lambda]$ и $t \in [\tau, t_1]$, то, разбивая отрезок интегрирования $[t_0, t_1]$ на три отрезка, имеем

$$I(x_\lambda) - I(\hat{x}) = \int_{\tau-\lambda}^{\tau} \Big(L(t, x_\lambda(t), \dot{\hat{x}}(t) + \xi) - L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \Big)\, dt + \\ + \int_{\tau}^{\tau+\sqrt{\lambda}} \Big(L(t, x_\lambda(t), \dot{x}_\lambda(t)) - L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \Big)\, dt =: I_1 + I_2.$$

При малых $\lambda \geqslant 0$

$$I_1 = \lambda \Big(L(\tau, \hat{x}(\tau), \dot{\hat{x}}(\tau) + \xi) - L(\tau, \hat{x}(\tau), \dot{\hat{x}}(\tau)) \Big) + o(\lambda).$$

Поскольку при $t \in (\tau, \tau + \sqrt{\lambda})$ по теореме о среднем

$$L(t, \hat{x} + h_\lambda, \dot{\hat{x}} + \dot{h}_\lambda) - L(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}) = L_x(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}})h_\lambda + L_{\dot{x}}(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}})\dot{h}_\lambda + o\big(|(h_\lambda, \dot{h}_\lambda)|\big) = \widehat{L}_x h_\lambda + \widehat{L}_{\dot{x}}\dot{h}_\lambda + o(\sqrt{\lambda}),$$

то

$$I_2 = \int\limits_\tau^{\tau+\sqrt{\lambda}} \big(\widehat{L}_x h_\lambda + \widehat{L}_{\dot{x}}\dot{h}_\lambda + o(\sqrt{\lambda})\big)\,dt = \int\limits_\tau^{\tau+\sqrt{\lambda}} \widehat{L}_x h_\lambda\,dt + \int\limits_\tau^{\tau+\sqrt{\lambda}} \widehat{L}_{\dot{x}}\,dh_\lambda + o(\lambda).$$

Интегрируя по частям и пользуясь тем, что функция $\hat{x}$ удовлетворяет уравнению Эйлера, получим

$$I_2 = \int\limits_\tau^{\tau+\sqrt{\lambda}} \Big(-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}} + \widehat{L}_x\Big)h_\lambda\,dt + \widehat{L}_{\dot{x}}(t)h_\lambda(t)\Big|_\tau^{\tau+\sqrt{\lambda}} + o(\lambda) = -\lambda\xi\widehat{L}_{\dot{x}}(\tau) + o(\lambda).$$

Отсюда

$$I(x_\lambda) - I(\hat{x}) = \lambda\big(L\big(\tau, \hat{x}(\tau), \dot{\hat{x}}(\tau) + \xi\big) - \widehat{L}(\tau) - \xi\widehat{L}_{\dot{x}}(\tau)\big) + o(\lambda).$$

Так как $\hat{x} \in \operatorname{locmin} P$, то $I(x_\lambda) - I(\hat{x}) \geqslant 0$. Деля на λ и устремляя λ к $+0$, получим

$$L\big(\tau, \hat{x}(\tau), \dot{\hat{x}}(\tau) + \xi\big) - \widehat{L}(\tau) - \xi\widehat{L}_{\dot{x}}(\tau) \geqslant 0.$$

Условие Вейерштрасса доказано. ■

В задаче на максимум условие Вейерштрасса меняет свой знак.

В следующем пункте условие Вейерштрасса будет выведено из принципа максимума Понтрягина.

1.4.2. Необходимые условия сильного экстремума.

Теорема 1. *Пусть функция $\hat{x} \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ доставляет сильный локальный минимум в задаче (P) ($\hat{x} \in \operatorname{strlocmin} P$), и интегрант L непрерывно дифференцируем в некоторой окрестности расширенного графика $\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}}$ ($L \in C^1\big(\mathcal{O}(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}})\big)$). Тогда на $\hat{x}$ выполняется уравнение Эйлера и удовлетворяется условие Вейерштрасса*

$$\mathcal{E}(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}, u) = L(t, \hat{x}, u) - L(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}) - \widehat{L}_{\dot{x}}(t)(u - \dot{x}) \geqslant 0 \ \forall\, u \in \mathbb{R}^n, \ \forall\, t \in [t_0, t_1]$$

Если при этом существует $\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\ \forall\, t \in [t_0, t_1]$, то выполняется также условие Лежандра: $\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) \geqslant 0\ \forall\, t \in [t_0, t_1]$.

Доказательство. Формализуем задачу (P) как задачу оптимального управления

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x, u)\,dt \to \inf; \quad \dot{x} = u, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1. \qquad (P')$$

Условие $\hat{x} \in \operatorname{strlocmin} P$ равносильно тому, что пара $(\hat{x}, \hat{u})$, где $\hat{u}(t) = \dot{\hat{x}}(t)$, является оптимальным процессом в задаче оптимального управления (P'). Поэтому согласно принципу максимума Понтрягина найдутся множители Лагранжа $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ и $p(\cdot) \in PC^1([t_0, t_1])$ не все равные нулю и такие, что для функции Лагранжа задачи (P')

$$\Lambda = \int\limits_{t_0}^{t_1} \big(\lambda_0 L(t, x, u) + p(t)(\dot{x} - u)\big)\,dt + \lambda_1\big(x(t_0) - x_0\big) + \lambda_2\big(x(t_1) - x_1\big)$$

выполняются условия:

a) уравнение Эйлера: $-\dfrac{d}{dt}p(t) + \lambda_0\widehat{L}_x(t) = 0\ \forall\, t \in [t_0, t_1]$;

b) трансверсальности по x: $p(t_0) = \lambda_1$, $p(t_1) = -\lambda_2$;

c) оптимальности по u:

$$\min_{u \in \mathbb{R}^n}\{\lambda_0 L(t, \hat{x}(t), u) - p(t)u\} = \lambda_0 L\big(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)\big) - p(t)\dot{\hat{x}}(t).$$

Если $\lambda_0 = 0$, то из c) (поскольку минимум конечен и равен $-p(t)\dot{\hat{x}}(t)$) вытекает, что $p(t) \equiv 0$, а из b) — что все множители Лагранжа нули. Значит, $\lambda_0 \neq 0$. Полагаем $\lambda_0 = 1$. Тогда из c) следует, что $\widehat{L}_{\dot{x}}(t) = p(t)$ (необходимое условие I порядка минимума функции $L\big(t, \hat{x}(t), u\big) - p(t)u$) и $\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) \geqslant 0\ \forall\, t \in [t_0, t_1]$ (необходимое условие II порядка). Подставляя $p = \widehat{L}_{\dot{x}}$ в условие стационарности по x, получаем уравнение Эйлера. Условие оптимальности по u при $\lambda_0 = 1$ и $p = \widehat{L}_{\dot{x}}$

$$L\big(t, \hat{x}(t), u\big) - \widehat{L}_{\dot{x}}(t)u \geqslant L\big(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)\big) - \widehat{L}_{\dot{x}}(t)\dot{\hat{x}}(t) \quad \forall\, u \in \mathbb{R}^n, \ \forall\, t \in [t_0, t_1]$$

есть не что иное, как условие Вейерштрасса. ■

1.4.3. Лемма о скруглении углов

Лемма. *Пусть функция $\hat{x} \in PC^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$, интегрант $L \in C(\mathbb{R}^{2n+1})$. Тогда существует последовательность гладких функций $\{x_n\}_{n \geqslant 1} \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$, $x_n(t_0) = \hat{x}(t_0)$, $x_n(t_1) = \hat{x}(t_1)$, такая, что $x_n(\cdot) \to \hat{x}(\cdot)$ в метрике пространства $C([t_0, t_1])$, и $\lim\limits_{n\to\infty} I(x_n) = I(\hat{x})$.*

Доказательство. Для простоты записи проведем доказательство для $n = 1$. Возьмем функцию

$$a(t) = \begin{cases} \dfrac{(1-|t|)^2}{4}, & |t| \leqslant 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

Она непрерывна, а ее производная при $t = 0$ имеет скачок величины -1, $|a(t)| \leqslant \frac{1}{4}$, $|\dot a(t)| \leqslant \frac{1}{2}$. Пусть $\tau_i \in (t_0, t_1)$, $i = 1, \ldots, m$, — точки разрыва производной $\dot{\hat x}$ и $\Delta_i = \dot{\hat x}(\tau_i + 0) - \dot{\hat x}(\tau_i - 0)$ — ее скачки в этих точках. Функция $h_n(\cdot, \tau_i) = \frac{1}{n} a(n(\cdot - \tau_i))$, график которой получается из графика функции a преобразованиями подобия и сдвига, также непрерывна, и ее производная непрерывна, кроме точки τ_i, где она по-прежнему имеет скачок -1, кроме того $|h(t, \tau_i)| \leqslant \frac{1}{4n}$, $|\dot h(t, \tau_i)| \leqslant \frac{1}{2}$.

Тогда функция $x_n(t) = \hat x(t) + \sum\limits_{i=1}^{m} \Delta_i h(t, \tau_i)$ непрерывна вместе со своей производной на отрезке $[t_0, t_1]$, причем $x_n(t) = \hat x(t)$ вне отрезков $[\tau_i - \frac{1}{n}, \tau_i + \frac{1}{n}]$. В частности, для достаточно больших n эти отрезки не перекрываются, $x_n(t_0) = \hat x(t_0)$, $x_n(t_1) = \hat x(t_1)$,

$$\left|x_n(t) - \hat x(t)\right| = \left|\sum_{i=1}^{m} \Delta_i h(t, \tau_i)\right| \leqslant \frac{1}{4n} \max_i |\Delta_i| = \frac{\Delta}{4n} \to 0 \text{ при } n \to +\infty,$$

$$\left|\dot x_n(t) - \dot{\hat x}(t)\right| = \left|\sum_{i=1}^{m} \Delta_i \dot h(t, \tau_i)\right| \leqslant \frac{1}{2} \max_i |\Delta_i| = \frac{\Delta}{2} \quad (\Delta := \max_i |\Delta_i|).$$

На компакте $\left\{(t, x, \dot x) \mid t_0 \leqslant t \leqslant t_1,\ |x - \hat x(t)| \leqslant \frac{\Delta}{4n_0},\ |\dot x - \dot{\hat x}(t)| \leqslant \frac{\Delta}{2}\right\}$, непрерывная функция L ограничена: $|L(t, x, \dot x)| \leqslant M$. Поэтому

$$\left|I(x_n) - I(\hat x)\right| = \left|\int_{t_0}^{t_1} L(t, x_n, \dot x_n)\, dt - \int_{t_0}^{t_1} L(t, \hat x, \dot{\hat x})\, dt\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{m} \int_{\tau_i - \frac{1}{n}}^{\tau_i + \frac{1}{n}} \left(L(t, x_n, \dot x_n) - L(t, \hat x, \dot{\hat x})\right) dt\right| \leqslant \frac{4Mm}{n} \text{ при } n > n_0$$

и, следовательно, $I(x_n) \to I(\hat x)$ при $n \to +\infty$. ■

Следствие. *Абсолютный экстремум в задаче* (P) *на сильный и слабый экстремум совпадают*: $S_{\mathrm{strabsmin}\,P} = S_{\mathrm{wabsmin}\,P}$.

Для локальных экстремумов это может быть не так (см. п. 1.2).

1.4.4. Необходимые условия слабого экстремума.

Теорема 2. *Пусть функция* $\hat x \in C^2([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ *доставляет слабый локальный минимум в задаче* (P) $(\hat x \in \mathrm{wlocmin}\, P)$, *интегрант* L *трижды непрерывно дифференцируем в некоторой окрестности расширенного графика* $\Gamma_{\hat x \dot{\hat x}}$ $(L \in C^3(\mathcal{O}(\Gamma_{\hat x \dot{\hat x}})))$. *Тогда на* $\hat x$ *выполняется уравнение Эйлера, условие Лежандра и, если на экстремали* $\hat x$ *выполнено усиленное условие Лежандра* $(\widehat L_{\dot x \dot x}(t) > 0\ \forall\, t \in [t_0, t_1])$, *то выполняется и условие Якоби, т. е. на интервале* (t_0, t_1) *нет сопряженных точек.*

В задаче на максимум условие Лежандра меняет свой знак.

Доказательство. Для простоты записи проведем доказательство для $n = 1$.

1) *Вывод уравнения Эйлера и условия Лежандра.* Поскольку функция $\hat x \in \mathrm{wlocmin}\, P$, то для любой функции $h \in C_0^1([t_0, t_1])$ функция $\varphi(\lambda) = I(\hat x(\cdot) + \lambda h(\cdot))$ имеет локальный минимум в нуле. Тогда по необходимому условию минимума функции одного переменного $\varphi'(0) = 0$ и $\varphi''(0) \geqslant 0$. В главе 3 п. 1.3 было показано, что первое условие равносильно выполнению уравнения Эйлера на функции $\hat x$. Второе условие эквивалентно неотрицательности функционала

$$K(h(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\widehat L_{\dot x \dot x}(t) \dot h^2(t) + 2\widehat L_{x \dot x}(t) \dot h(t) h(t) + \widehat L_{xx}(t) h^2(t)\right) dt \geqslant 0$$
$$\forall\, h \in C_0^1([t_0, t_1]).$$

Из неотрицательности и вида функционала K следует, что функция $\bar h(t) \equiv 0$ доставляет абсолютный минимум (слабый) в задаче

$$K(h(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\widehat L_{\dot x \dot x} \dot h^2 + 2\widehat L_{x \dot x} \dot h h + \widehat L_{xx} h^2\right) dt \to \inf; \quad h(t_0) = h(t_1) = 0. \ (P'')$$

По следствию из леммы о скруглении углов функция $\bar h \equiv 0$ доставляет в задаче (P'') и сильный минимум. Тогда в силу теоремы 1 о необходимых условиях сильного минимума в задаче (P'') на $\bar h$ выполняется условие Лежандра для интегранта

$$\widetilde L(t, h(t), \dot h(t)) := \widehat L_{\dot x \dot x}(t) \dot h^2(t) + 2\widehat L_{x \dot x}(t) \dot h(t) h(t) + \widehat L_{xx}(t) h^2(t),$$

т. е. $\widetilde L_{\dot h \dot h}(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow \widehat L_{\dot x \dot x}(t) \geqslant 0\ \forall\ t \in [t_0, t_1]$. Таким образом, условие Лежандра в задаче (P) выполнено.

2) *Вывод условия Якоби.* Предположим противное, что условие Якоби не выполнено, т. е. существует точка $\tau \in (t_0, t_1)$ и нетривиальное ($h \not\equiv 0$) решение $h \in C^1([t_0, t_1])$ уравнения Якоби, для которого $h(t_0) = h(\tau) = 0$. Отметим, что из нетривиальности решения h однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с условием $h(\tau) = 0$ вытекает, что $\dot h(\tau) \neq 0$. Положим $\tilde h(t) = \begin{cases} h(t), & t_0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 0, & \tau \leqslant t \leqslant t_1. \end{cases}$ Так как функция h удовлетворяет уравнению Якоби, то после интегрирования по частям получим

$$K(\tilde h(\cdot)) = \int_{t_0}^{\tau} \left(\widehat L_{\dot x\dot x}\dot h^2 + 2\widehat L_{x\dot x}\dot h h + \widehat L_{xx}h^2\right) dt =$$

$$= \int_{t_0}^{\tau} \left(\widehat L_{\dot x\dot x}\dot h^2 + \widehat L_{\dot x x}h\dot h + \widehat L_{x\dot x}\dot h h + \widehat L_{xx}h^2\right) dt =$$

$$= \int_{t_0}^{\tau} \left(\widehat L_{\dot x\dot x}\dot h + \widehat L_{\dot x x}h\right)\dot h\, dt + \int_{t_0}^{\tau} \left(\widehat L_{x\dot x}\dot h + \widehat L_{xx}h\right) h\, dt =$$

$$= \left(\widehat L_{\dot x\dot x}\dot h + \widehat L_{\dot x x}h\right)h\Big|_{t_0}^{\tau} + \int_{t_0}^{\tau}\left(-\frac{d}{dt}\left(\widehat L_{\dot x\dot x}\dot h + \widehat L_{\dot x x}h\right) + \widehat L_{x\dot x}\dot h + \widehat L_{xx}h\right)h\, dt = 0.$$

Таким образом, $K(\tilde h) = 0$, а это означает, что $\tilde h \in \operatorname{strlocmin} P''$ (наряду с функцией $\bar h \equiv 0$). Проводя рассуждения, аналогичные проведенным в теореме 1, получим, что найдется функция $\tilde p \in PC^1([t_0, t_1])$ такая, что для лагранжиана квадратичной задачи $\widetilde L(t, h, \dot h) = \widehat L_{\dot x\dot x}\dot h^2 + 2\widehat L_{\dot x x}\dot h h + \widehat L_{xx}h^2$ на экстремали $\tilde h$ выполняется уравнение

$$\tilde p(t) = \widetilde L_{\dot h}(t, \tilde h(t), \dot{\tilde h}(t)) \iff \tilde p(t) = 2\left(\widehat L_{\dot x\dot x}(t)\dot{\tilde h}(t) + \widehat L_{\dot x x}(t)\tilde h(t)\right).$$

Поскольку $\tilde h(t) \equiv 0$ при $t > \tau$, то $\tilde p(\tau + 0) = 0$ и в силу непрерывности функции $\tilde p$

$$0 = \tilde p(\tau - 0) = 2\widehat L_{\dot x\dot x}(\tau)\dot{\tilde h}(\tau - 0) = 2\widehat L_{\dot x\dot x}(\tau)\dot h(\tau) = 0,$$

откуда $\dot h(\tau) = 0$ (ибо $\widehat L_{\dot x\dot x}(\tau) \neq 0$ из-за усиленного условия Лежандра). Мы пришли к противоречию с условием $\dot h(\tau) \neq 0$. Таким образом, предположение противного неверно и условие Якоби выполнено. ∎

1.4.5. Поле экстремалей

Пусть в простейшей задаче КВИ

$$I(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot x(t))\, dt \to \inf;\ x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1. \qquad (P)$$

$\hat x$ — некоторая экстремаль (т. е. на $\hat x$ выполняется уравнение Эйлера) из семейства экстремалей $\{x(\cdot, \lambda)\}$, $x(\cdot, \lambda) \in C^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$, с параметром $\lambda \in \Lambda \in \mathcal{O}(\mathbf{R}^n)$ ($\Leftrightarrow$ Λ — некоторое открытое множество в пространстве $\mathbf{R}^n$).

Говорим, что экстремаль $\hat x$ *окружена полем экстремалей* $x(\cdot, \lambda)$, если существует окрестность G графика $\Gamma_{\hat x} = \{(t, \hat x(t)) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid t \in [t_0, t_1]\}$ такая, что для любой точки (τ, ξ) из этой окрестности имеется единственная экстремаль семейства, проходящая через эту точку. Точнее говоря, существует функция $\lambda\colon G \to \mathbf{R}^n$, $\lambda = \lambda(\tau, \xi)$, класса $C^1(G)$, такая, что $x(\tau, \lambda) = \xi \Leftrightarrow \lambda = \lambda(\tau, \xi)$. Функция $u\colon G \to \mathbf{R}^n$, $u(\tau, \xi) = \frac{d}{dt}x(t, \lambda(\tau, \xi))\Big|_{t=\tau}$ называется *функцией наклона поля.*

Если существует такая точка (t_*, x_*), что $x(t_*, \lambda) = x_*$ для всех $\lambda \in \Lambda$, то говорят, что $\hat x$ *окружена центральным полем экстремалей.* Точка (t_*, x_*) называется *центром поля*, семейство $x(t, \lambda)$ — *центральным полем экстремалей.*

Пример. $I(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1}(\dot x^2 - x^2)\, dt$ (гармонический осциллятор).

Уравнение Эйлера $\ddot x + x = 0$. Экстремали этого функционала имеют вид $x(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t$. Совокупность экстремалей $x(t, \lambda) = \lambda \sin t$ есть центральное поле экстремалей с центром в точке (0,0), включающее, в частности, экстремаль $\hat x(t) \equiv 0$, покрывающее полосу $0 < t < \pi$. Функция наклона поля $u(\tau, \xi)$, $0 < \tau < \pi$, вычисляется следующим образом: надо взять экстремаль поля, проходящую через точку (τ, ξ) (т. е. $\xi\frac{\sin t}{\sin \tau}$), и вычислить производную этой экстремали по t в точке τ. Таким образом, $u(\tau, \xi) = \xi \operatorname{ctg} \tau$.

Отметим геометрический смысл сопряженной точки. Сопряженная точка — это точка пересечения «бесконечно близких» экстремалей. Если рассмотреть центральное поле экстремалей $x(\cdot, \lambda)$, удовлетворяющее условиям $x(t_*, \lambda) = \hat x(t_*)$, $\dot x(t_*, \lambda) = \dot{\hat x}(t_*) + \lambda$, то сопряженные точки — это точки пересечения экстремали с огибающей этого семейства. Иначе говоря, надо решить уравнение $x_\lambda(t, \lambda) = 0$. В приведенном выше примере сопряженные точки: $\tau_k = k\pi$, $k = 1, 2, \ldots$.

Построение центрального поля экстремалей

Теорема. *Пусть* $\hat{x} \in C^2([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ *— допустимая экстремаль в задаче* (P) $(\hat{x} \in E(P))$, *интегрант* L *трижды непрерывно дифференцируем в некоторой окрестности расширенного графика* $\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}}$ $(L \in C^3(\mathcal{O}(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}})))$, *выполнены усиленные условия Лежандра и Якоби. Тогда* $\hat{x}$ *можно окружить центральным полем экстремалей.*

Доказательство. Распишем уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}) + L_x(t, x, \dot{x}) = 0 \iff$$

$$L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x, \dot{x})\ddot{x} + L_{\dot{x}x}(t, x, \dot{x})\dot{x} + L_{\dot{x}t}(t, x, \dot{x}) - L_x(t, x, \dot{x}) = 0.$$

Так как выполнено усиленное условие Лежандра, т. е. неравенство $\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) > 0 \ \forall\ t \in [t_0, t_1]$, то в силу непрерывности функции $L_{\dot{x}\dot{x}}$ (напомним, что $L \in C^3$) найдется такое $U \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^{2n+1})$, $\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}} \subset U$, что $L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x, \dot{x}) > 0 \ \forall\ (t, x, \dot{x}) \in U$. Значит, в области U уравнение Эйлера равносильно системе, разрешенной относительно производных

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \Phi(t, x, y),$$

где $\Phi(t, x, y) := L_{\dot{x}\dot{x}}^{-1}(t, x, y)\big(L_x(t, x, y) - L_{\dot{x}t}(t, x, y) - L_{\dot{x}x}(t, x, y)y\big)$.

В силу предположенной гладкости интегранта функция Φ непрерывно дифференцируема в окрестности U. Тогда по локальной теореме существования [АТФ, с. 186] и глобальной теореме существования и непрерывной зависимости решения от начальных данных [АТФ, с. 195] найдутся такие $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что

a) решение $\hat{x}$ продолжимо на отрезок $[t_0 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon]$;

b) для любого $\lambda \in \mathbb{R}^n$ $(|\lambda| < \delta)$ на отрезке $[t_0 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon]$ определено решение $x(\cdot, \lambda)$ уравнения Эйлера с начальными данными $x(t_*, \lambda) = \hat{x}(t_*)$, $\dot{x}(t_*, \lambda) = \dot{\hat{x}}(t_*) + \lambda$, где t_* — некоторая точка интервала $(t_0 - \varepsilon, t_0)$.

По теореме о дифференцируемой зависимости от начальных данных [АТФ, с. 204] функция

$$(t, \lambda) \to x(t, \lambda) = \big(x_1(t, \lambda), \ldots, x_n(t, \lambda)\big)$$

непрерывно дифференцируема. Покажем, что экстремаль $\hat{x}$ окружена центральным полем экстремалей $x(\cdot, \lambda)$.

Дифференцируя функцию $x(t, \lambda)$ по λ, полагая $\lambda = 0$ и обозначая

$$x_\lambda(t, \lambda)|_{\lambda=0} =: H(t, t_*)$$

$$\left(H_{ij}(t, t_*) := \frac{\partial x_i(t, \lambda)}{\partial \lambda_j},\ i, j = 1, \ldots, n\right),$$

получаем (поскольку $x(t, \lambda)$ — экстремаль для любого λ, $|\lambda| < \delta$)

$$0 \equiv \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}\big(t, x(t, \lambda), \dot{x}(t, \lambda)\big) + L_x\big(t, x(t, \lambda), \dot{x}(t, \lambda)\big)\right)\bigg|_{\lambda=0} \Rightarrow$$

$$-\frac{d}{dt}\big(\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{H}(t, t_*) + \widehat{L}_{\dot{x}x}(t)H(t, t_*)\big) + \widehat{L}_{x\dot{x}}(t)\dot{H}(t, t_*) + \widehat{L}_{xx}(t)H(t, t_*) = 0.$$

Значит, матрица $H(\cdot, t_*)$ удовлетворяет уравнению Якоби. При этом выполнены следующие начальные условия:

$$H(t_*, t_*) = \frac{\partial}{\partial\lambda}x(t_*, \lambda)\Big|_{\lambda=0} = \frac{\partial}{\partial\lambda}\hat{x}(t_*) = 0,$$

$$\dot{H}(t_*, t_*) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\dot{x}(t_*, \lambda)\Big|_{\lambda=0} = \frac{\partial}{\partial\lambda}\big(\dot{\hat{x}}(t_*) + \lambda\big) = I.$$

Пусть $H(t, t_0)$ — матричное решение уравнения Якоби с условиями $H(t_0, t_0) = 0$, $\dot{H}(t_0, t_0) = I$. Поскольку выполнено усиленное условие Якоби, то не существует нетривиального решения h уравнения Якоби, удовлетворяющего условиям $h(t_0) = h(\tau) = 0$, $t_0 < \tau \leqslant t_1$. Таким образом, усиленное условие Якоби равносильно невырожденности матрицы $H(t, t_0) = 0$ при любом $t \in (t_0, t_1]$. Но тогда снова в силу глобальной теоремы существования и непрерывной зависимости решения от начальных данных [АТФ, с. 195] при достаточной близости t_* к t_0 матрица $H(t, t_*)$ будет невырожденной для любого $t \in [t_0, t_1]$. Рассмотрим отображение $\Psi(t, \lambda) = \big(t, x(t, \lambda)\big)$ в некоторой точке $(t, 0)$, $t \in [t_0, t_1]$. Имеем $\Psi(t, 0) = \big(t, \hat{x}(t)\big)$,

$$\det \Psi'(t, 0) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_t(t, 0) & x_\lambda(t, 0) \end{pmatrix} = \det x_\lambda(t, 0) = \det H(t, t_*) \neq 0.$$

Значит, по теореме об обратной функции найдется такое $\delta = \delta(t) > 0$, что для любой точки (τ, ξ), для которой $|t - \tau| < \delta$, $|\hat{x}(t) - \xi| < \delta$, существует единственное $\lambda = \lambda(\tau, \xi)$, такое, что

$$\Psi\big(\tau, \lambda(\tau, \xi)\big) = (\tau, \xi) \iff x\big(\tau, \lambda(\tau, \xi)\big) = \xi.$$

В силу компактности графика $\Gamma_{\hat{x}} = \big\{\big(t, \hat{x}(t)\big) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \in [t_0, t_1]\big\}$ (из любого открытого покрытия компакта можно выбрать конечное подпокрытие) можно найти одно δ_0, такое, что для любой точки (τ, ξ), $\tau \in [t_0, t_1]$, $|\hat{x}(\tau) - \xi| < \delta_0$, существует (и, как нетрудно понять, единственное) $\lambda = \lambda(\tau, \xi)$ при котором $x\big(\tau, \lambda(\tau, \xi)\big) = \xi$. При этом гладкость функции λ такая же, как гладкость $\hat{x}$ т. е. C^2. Построение центрального поля, окружающего экстремаль, закончено. ■

S-функция и ее дифференциал

Пусть $x(\cdot,\lambda)$ — дважды непрерывно дифференцируемое центральное поле экстремалей с центром t_*, окружающее экстремаль $\hat{x}(\cdot)$, и интегрант L — трижды непрерывно дифференцируем в некоторой окрестности расширенного графика $\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}}$ $(L \in C^3(\mathcal{O}(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}})))$. Функция

$$S(\tau,\xi)=\int_{t_*}^{\tau} L\Big(t,x\big(t,\lambda(\tau,\xi)\big),\dot{x}\big(t,\lambda(\tau,\xi)\big)\Big)\,dt$$

называется *S-функцией центрального поля* $x(\cdot,\lambda)$. Найдем дифференциал S-функции. Он понадобится нам для вывода основной формулы Вейерштрасса при доказательстве достаточных условий сильного экстремума. Для нахождения частных производных S-функции нам понадобятся некоторые соотношения. Имеем по определению поля и функции наклона поля

$$x\big(\tau,\lambda(\tau,\xi)\big)=\xi.$$

Дифференцируя обе части этого равенства по τ, получим

$$\dot{x}\big(\tau,\lambda(\tau,\xi)\big)+x_\lambda\big(\tau,\lambda(\tau,\xi)\big)\lambda_\tau(\tau,\xi)=0 \Rightarrow$$
$$-x_\lambda\lambda_\tau=\dot{x}\big(\tau,\lambda(\tau,\xi)\big)=:u(\tau,\xi) \qquad (\tau)$$

($u(\tau,\xi)$ — функция наклона поля), дифференцируя обе части равенства по ξ, получим

$$x_\lambda\big(\tau,\lambda(\tau,\xi)\big)\lambda_\xi(\tau,\xi)=I \qquad (\xi)$$

(I — единичная матрица). Поскольку t_* — центр поля, то $x(t_*,\lambda)=x_*$, и, значит, выполняется следующее соотношение

$$x_\lambda\big(t_*,\lambda(\tau,\xi)\big)=0. \qquad (*)$$

Найдем $\frac{\partial S}{\partial\tau}$, дифференцируя по τ интеграл с. переменным верхним пределом, и используя непрерывность $\dot{x}_\lambda$, вытекающую из того, что $x(\cdot,\lambda)\in C^2$. Имеем

$$\frac{\partial S}{\partial\tau}=L\big(\tau,\xi,u(\tau,\xi)\big)+$$
$$+\int_{t_*}^{\tau}\Big(L_x\Big(t,x\big(t,\lambda(\tau,\xi)\big),\dot{x}\big(t,\lambda(\tau,\xi)\big)\Big)x_\lambda\big(t,\lambda(\tau,\xi)\big)\lambda_\tau(\tau,\xi)+$$
$$+L_{\dot{x}}\Big(t,x\big(t,\lambda(\tau,\xi)\big),\dot{x}\big(t,\lambda(\tau,\xi)\big)\Big)\dot{x}_\lambda\big(t,\lambda(\tau,\xi)\big)\lambda_\tau(\tau,\xi)\Big)\,dt=L(\tau,\xi,u)+$$

$$+\int_{t_*}^{\tau}(L_x x_\lambda\lambda_\tau+L_{\dot{x}}\dot{x}_\lambda\lambda_\tau)\,dt=L(\tau,\xi,u)+\int_{t_*}^{\tau}L_x x_\lambda\lambda_\tau\,dt+\int_{t_*}^{\tau}L_{\dot{x}}\,dx_\lambda\lambda_\tau=$$
$$=L(\tau,\xi,u)+L_{\dot{x}}x_\lambda\lambda_\tau\Big|_{t_*}^{\tau}+\int_{t_*}^{\tau}\Big(-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}+L_x\Big)x_\lambda\lambda_\tau\,dt=$$
$$\overset{(\tau),(*)}{=}L\big(\tau,\xi,u(\tau,\xi)\big)-L_{\dot{x}}\big(\tau,\xi,u(\tau,\xi)\big)\,u(\tau,\xi).$$

При выводе мы воспользовались тем, что функции $x(\cdot,\lambda)$ — экстремали, т.е. удовлетворяют уравнению Эйлера.

Формула для $\frac{\partial S}{\partial\xi}$ выводится аналогично. Дифференцируя по ξ, получим

$$\frac{\partial S}{\partial\xi}=\int_{t_*}^{\tau}(L_x x_\lambda\lambda_\xi+L_{\dot{x}}\dot{x}_\lambda\lambda_\xi)\,dt=\int_{t_*}^{\tau}L_x x_\lambda\lambda_\xi\,dt+\int_{t_*}^{\tau}L_{\dot{x}}\,dx_\lambda\lambda_\xi=$$
$$=L_{\dot{x}}x_\lambda\lambda_\xi\Big|_{t_*}^{\tau}+\int_{t_*}^{\tau}\Big(-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}+L_x\Big)x_\lambda\lambda_\xi\,dt\overset{(\xi),(*)}{=}L_{\dot{x}}\big(\tau,\xi,u(\tau,\xi)\big).$$

Таким образом, имеет место следующая формула для дифференциала функции S:

$$dS(\tau,\xi)=\frac{\partial S}{\partial\tau}\,d\tau+\frac{\partial S}{\partial\xi}\,d\xi=$$
$$=\Big(L\big(\tau,\xi,u(\tau,\xi)\big)-L_{\dot{x}}\big(\tau,\xi,u(\tau,\xi)\big)u(\tau,\xi)\Big)\,d\tau+L_{\dot{x}}\big(\tau,\xi,u(\tau,\xi)\big)\,d\xi.$$

В частности, для функции $x\in PC^1([t_0,t_1],\mathbf{R}^n)$ формула для дифференциала функции S примет вид:

$$dS\big(t,x(t)\big)=\Big(L\Big(t,x(t),u\big(t,x(t)\big)\Big)-L_{\dot{x}}\Big(t,x(t),u\big(t,x(t)\big)\Big)u\big(t,x(t)\big)\Big)\,dt+$$
$$+L_{\dot{x}}\Big(t,x(t),u\big(t,x(t)\big)\Big)\,dx(t)=$$
$$=L\Big(t,x(t),u\big(t,x(t)\big)\Big)+L_{\dot{x}}\Big(t,x(t),u\big(t,x(t)\big)\Big)\Big(\dot{x}(t)-u\big(t,x(t)\big)\Big)\,dt. \qquad (1)$$

В таком виде мы ей и будем пользоваться в дальнейшем. Отметим также, что, поскольку $u\big(t,\hat{x}(t)\big)=\dot{\hat{x}}(t)$, то

$$dS\big(t,\hat{x}(t)\big)=\widehat{L}(t). \qquad (2)$$

1.4.6. Достаточные условия слабого экстремума

Теорема 3. *Пусть функция $\hat{x} \in C^2([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ — допустимая экстремаль в задаче (P), интегрант $L \in C^3(V \times \mathbf{R}^n)$, где $V \subset \mathbf{R}^{n+1}$ — некоторая окрестность графика $\Gamma_{\hat{x}} = \{(t, \hat{x}(t)) \mid t \in [t_0, t_1]\}$, на $\hat{x}$ выполнены усиленные условия Лежандра и Якоби. Тогда $\hat{x}$ доставляет слабый локальный минимум ($\hat{x} \in \mathrm{wlocmin}\, P$)* [АТФ, с. 377].

1.4.7. Достаточные условия сильного экстремума

Теорема 4. *Пусть функция $\hat{x} \in C^2([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ — допустимая экстремаль в задаче (P), интегрант $L \in C^3(V \times \mathbf{R}^n)$, где $V \subset \mathbf{R}^{n+1}$ — некоторая окрестность графика $\Gamma_{\hat{x}}$, на $\hat{x}$ выполнены усиленные условия Лежандра и Якоби, интегрант L является выпуклым по $\dot{x}$ на V. Тогда $\hat{x}$ доставляет сильный локальный минимум ($\hat{x} \in \mathrm{strlocmin}\, P$).*

Доказательство. Условия теоремы позволяют (см. п. 1.4.5) окружить $\hat{x}$ центральным полем экстремалей $x(\cdot, \lambda)$, покрывающим некоторую окрестность $U \subset V$ графика $\Gamma_{\hat{x}}$. Пусть $x \in PC^1([t_0, t_1])$ — произвольная допустимая функция, график Γ_x которой расположен в этой окрестности. Тогда по формуле (2) п. 1.4.5

$$I(\hat{x}) = \int_{t_0}^{t_1} \widehat{L}(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} dS(t, \hat{x}(t)) = S(t_1, x_1) - S(t_0, x_0) = \int_{t_0}^{t_1} dS(t, x(t)).$$

Следовательно, по формуле (1) п. 1.4.5

$$I(x) - I(\hat{x}) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt - \int_{t_0}^{t_1} dS(t, x(t)) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \Big(L(t, x(t), \dot{x}(t)) - L\big(t, x(t), u(t, x(t))\big) - L_{\dot{x}}\big(t, x(t), u(t, x(t))\big) \times$$

$$\times \big(\dot{x}(t) - u(t, x(t))\big)\Big)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}\big(t, x(t), u(t, x(t)), \dot{x}(t)\big)\, dt.$$

Эту формулу называют *основной формулой Вейерштрасса*. Из выпуклости интегранта следует (см. п. 1.3), что если $(t, x) \in U$, то $E(t, x, u, \dot{x}) \geqslant 0$ для любых $(u, \dot{x}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$.

Таким образом, $\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}\big(t, x(t), u(t, x(t)), \dot{x}(t)\big)\, dt \geqslant 0$ и, значит, $I(x) \geqslant I(\hat{x})$, т. е. $\hat{x}$ доставляет сильный минимум. ■

1.4.8. Квадратичный функционал

Выделим случай квадратичных функционалов для вектор-функций $x(\cdot) = (x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot))$, который исследован до конца. Рассмотрим задачу

$$I(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \big(\langle A\dot{x}, \dot{x}\rangle + 2\langle C\dot{x}, x\rangle + \langle Bx, x\rangle\big)\, dt \to \inf;$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \qquad (P')$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — матрицы порядка $n \times n$, на слабый и сильный минимум.

Теорема 5. *Пусть в задаче (P') матрицы A и C непрерывно дифференцируемы, а B непрерывна; выполнено усиленное условие Лежандра ($A(t) > 0\ \forall\, t \in [t_0, t_1]$ — положительно определена). Тогда, если выполнено усиленное условие Якоби, то допустимая экстремаль существует, единственна и доставляет абсолютный минимум. Если же не выполнено условие Якоби, т. е. в интервале (t_0, t_1) есть сопряженная точка, то значение задачи равно $-\infty$ ($S_{\mathrm{absmin}} = -\infty$).*

Заметим, что по лемме о скруглении углов абсолютный минимум и сильный, и слабый совпадают.

Доказательство. Отметим вначале, что для квадратичных функционалов имеет место равенство

$$I(\hat{x} + h) = I(\hat{x}) + I'(\hat{x})[h] + \frac{1}{2} I''(\hat{x})[h, h].$$

Если $\hat{x}$ — допустимая экстремаль в задаче, то $I'(\hat{x})[h] = 0\ \forall\ h \in C_0^1([t_0, t_1])$ (это соотношение эквивалентно уравнению Эйлера). Поскольку для квадратичных функционалов $\frac{1}{2} I''(\hat{x})[h, h] = I(h)$, то на экстремали $\hat{x}$ выполняется соотношение

$$I(\hat{x} + h) = I(\hat{x}) + I(h) \quad \forall\ h \in C_0^1([t_0, t_1]). \qquad (*)$$

Предположим выполнено усиленное условие Якоби. Обозначим $H(t, \tau)$ — матричное решение уравнения Эйлера (совпадающего для квадратичной задачи с уравнением Якоби), удовлетворяющее условиям $H(\tau, \tau) = 0$, $\dot{H}(\tau, \tau) = I$. Из усиленного условия Якоби вытекает, что матрицы $H(t, t_0)$ и $H(t, t_1)$ невырождены для $t \in (t_0, t_1]$ и $[t_0, t_1)$ соответственно. Положим

$$H_0(t) = H(t, t_1) H^{-1}(t_0, t_1), \quad H_1(t) = H(t, t_0) H^{-1}(t_1, t_0).$$

Тогда $H_i(t_j) = \delta_{ij} I$ (δ_{ij} — символ Кронекера), $i, j = 0, 1$, и, значит, $\hat{x}(t) = H_0(t) x_0 + H_1(t) x_1$ — допустимая экстремаль в задаче (P'). Эта экстремаль единственна, поскольку если бы $\bar{x}(\cdot)$ была бы другой допустимой экстремалью, то $y = \hat{x} - \bar{x}$ было бы нетривиальным решением уравнения Якоби с условиями $y(t_0) = y(t_1) = 0$, а это противоречит усиленному условию Якоби.

Поскольку уравнение Эйлера для квадратичного функционала I является однородным уравнением, то функция $\bar{h} \equiv 0$ будет экстремалью. Окружим ее центральным полем экстремалей. Семейство функций $h(\cdot, \lambda) = H(\cdot, t_*)\lambda$, где $t_* < t_0$ настолько близко к t_0, что матрица $H(t, t_*)$ невырождена при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, покрывает всю полосу $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Кроме того

$$h(\tau, \lambda) = \xi \Leftrightarrow H(\tau, t_*)\lambda = \xi \Leftrightarrow \lambda = \lambda(\tau, \xi) = H^{-1}(\tau, t_*)\xi \in C^1.$$

Функция наклона поля $u(\tau, \xi) = \frac{d}{dt} h\big(t, \lambda(\tau, \xi)\big)\Big|_{t=\tau} = \dot{H}(\tau, t_*)\lambda(\tau, \xi) = \dot{H}(\tau, t_*)H^{-1}(\tau, t_*)\xi$. Для функции $h \in C_0^1([t_0, t_1])$ по основной формуле Вейерштрасса

$$I(\hat{x} + h) - I(\hat{x}) \overset{(*)}{=} I(h) = I(h) - I(\bar{h} \equiv 0) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \Big(L(t, h, \dot{h}) - L(t, h, u(t, h)) - \big\langle L_{\dot{h}}(t, h, u(t, h)), \dot{h} - u(t, h) \big\rangle \Big)\, dt =$$

(для квадратичной функции $L(\dot{h}) - L(u) - L'(u)(\dot{h} - u) = \big\langle \frac{1}{2} L''(u)(\dot{h} - u), (\dot{h} - u) \big\rangle$)

$$= \int_{t_0}^{t_1} \Big\langle \frac{1}{2} L_{\dot{h}\dot{h}}\big(t, h, u(t, h)\big)\big(\dot{h} - u(t, h)\big), \dot{h} - u(t, h) \Big\rangle\, dt \geqslant 0,$$

ибо $\frac{1}{2} L_{\dot{h}\dot{h}}(t) = A(t) > 0$ (положительно определенная матрица) по усиленному условию Лежандра. Значит, $\hat{x} \in \operatorname{absmin} P'$.

Предположим, что не выполнено условие Якоби. Тогда функция $\bar{h} \equiv 0 \notin \operatorname{absmin} P''$ не доставляет абсолютный минимум в задаче

$$I(h(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \big(\langle A\dot{h}, \dot{h} \rangle + 2\langle C\dot{h}, h \rangle + \langle Bh, h \rangle \big)\, dt \to \inf;$$

$$h(t_0) = h(t_1) = 0 \qquad (P'')$$

(по теореме о необходимых условиях слабого минимума, если $\bar{h} \equiv 0 \in \operatorname{absmin}(P'')$, то выполнено условие Якоби). Значит, $S_{\operatorname{absmin} P''} < 0$. Поэтому существует функция $h \in C_0^1([t_0, t_1])$ такая, что $I(h) < 0$. Но тогда $I(\hat{x} + \lambda h) = I(\hat{x}) + I(\lambda h) = I(\hat{x}) + \lambda^2 I(h) \to -\infty$ при $\lambda \to +\infty$, т. е. $S_{\operatorname{absmin} P'} = -\infty$. ∎

1.5. Правило решения

Для решения простейшей задачи классического вариационного исчисления с использованием необходимых и достаточных условий экстремума следует:

1. Найти допустимые экстремали, т. е. допустимые функции, удовлетворяющие необходимым условиям экстремума I порядка. Для этого надо

a) Выписать необходимое условие экстремума I порядка — уравнение Эйлера:

$$-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}} + L_x = 0.$$

b) Найти решения этого уравнения (они называются «экстремалями»).

c) Найти решения уравнения Эйлера, удовлетворяющие заданным условиям на концах (они называются «допустимыми экстремалями»).

2. Проверка необходимых и достаточных условий экстремума II порядка.

a) Проверить выполнение условия Лежандра:

Если $\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) \geqslant 0 \ \forall\ t \in [t_0, t_1]$ (выполнено условие Лежандра), то значит, выполнено необходимое условие слабого (а, следовательно, и сильного) минимума.

Если $\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) \leqslant 0 \ \forall\ t \in [t_0, t_1]$ (выполнено условие Лежандра), то значит, выполнено необходимое условие слабого (а, следовательно, и сильного) максимума.

Если же величина $\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)$ знакопеременна на отрезке $[t_0, t_1]$ (не выполнено условие Лежандра), то значит, не выполнено необходимое условие слабого (а, следовательно, и сильного) экстремума. В этом случае найденная допустимая экстремаль не доставляет слабого, и тем более, сильного экстремума.

Если $\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) > 0\ \forall\, t \in [t_0, t_1]$ или $\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) < 0\ \forall\, t \in [t_0, t_1]$ (выполнено усиленное условие Лежандра), то значит, выполнено необходимое условие слабого и сильного минимума, соответственно максимума. В этом случае переходим к исследованию условия Якоби.

b) Проверить выполнение условия Якоби:

b_1) Выписать интегрант квадратичного функционала

$$\widetilde{L}(t, h, \dot{h}) := \widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{h}^2(t) + 2\widehat{L}_{x\dot{x}}(t)\dot{h}(t)h(t) + \widehat{L}_{xx}(t)h^2(t).$$

b_2) Выписать уравнение Якоби на экстремали $\hat{x}$, т. е. уравнение Эйлера для интегранта $\widetilde{L}(t, h, \dot{h})$:

$$-\frac{d}{dt}\widetilde{L}_{\dot{h}} + \widetilde{L}_h = 0.$$

и решить его с начальными данными $h(t_0) = 0$, $\dot{h}(t_0) = 1$*.

b$_3$) Найти сопряженные точки τ, т. е. нули найденного решения $h(t)$ уравнения Якоби при $t > t_0$.

b$_4$) Проверить выполнение условия Якоби:

Если в интервале (t_0, t_1) нет точек, сопряженных с t_0 (выполнено условие Якоби), то значит, выполнено необходимое условие слабого (а, следовательно, и сильного) экстремума.

Если же в интервале (t_0, t_1) есть сопряженные точки (не выполнено условие Якоби), то значит, не выполнено необходимое условие слабого (а, следовательно, и сильного) экстремума. В этом случае найденная допустимая экстремаль не доставляет слабого, и тем более, сильного экстремума.

Если в полуинтервале $(t_0, t_1]$ нет точек, сопряженных с t_0 (выполнено усиленное условие Якоби), то значит, выполнено достаточное условие слабого экстремума. Следовательно (напомним, что уже выполнено усиленное условие Лежандра), найденная экстремаль доставляет слабый локальный минимум (если $\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) > 0 \ \forall\, t \in [t_0, t_1]$) или максимум (если $\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) < 0 \ \forall\, t \in [t_0, t_1]$).

Проверка на сильный экстремум.

c) Если интегрант L является выпуклым по $\dot{x}$ при всех фиксированных t и x, рассматриваемых в качестве параметра, то $\hat{x}$ доставляет сильный минимум в задаче. Аналогично, если интегрант L является вогнутым по $\dot{x}$, то $\hat{x}$ доставляет сильный максимум в задаче.

d) Если интегрант L не является ни выпуклым, ни вогнутым, то следует проверить выполнение необходимого условия сильного экстремума — условия Вейерштрасса:

$$\mathcal{E}(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}, u) = L(t, \hat{x}, u) - L(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}) - \widehat{L}_{\dot{x}}(t)(u - \dot{x}) \geqslant 0$$
$$\forall\, u \in \mathbf{R}, \ \forall\, t \in [t_0, t_1]$$

в задаче на минимум ($\mathcal{E} \leqslant 0$ в задаче на максимум).

Если не выполнено условие Вейерштрасса, то в этом случае найденная допустимая экстремаль не доставляет сильного экстремума.

* Для вектор-функций $x(\cdot) = \big(x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot)\big)$ ищется фундаментальная система решений уравнения Якоби — матрица $H(t) = \big(h^1(t) \ldots h^n(t)\big) = \begin{pmatrix} h_1^1(t) & \ldots & h_1^n(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ h_n^1(t) & \ldots & h_n^n(t) \end{pmatrix}$ с начальными условиями $H(t_0) = 0$ (нулевая матрица), $\dot{H}(t_0) = I$ (единичная матрица) или $\det \dot{H}(t_0) \neq 0$. Вектор-столбцы $h^i(\cdot) = \begin{pmatrix} h_1^i(\cdot) \\ \ldots \\ h_n^i(\cdot) \end{pmatrix}$ — решения системы уравнений Якоби. Сопряженными точками будут точки τ — нули уравнения $\det H(\tau) = 0$.

1.6. Примеры

Пример 1.

Исследуем с помощью условий второго порядка задачу, рассмотренную нами в п. 1.2:

$$I(x(\cdot)) = \int_0^1 \dot{x}^3\, dt \to \inf; \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1.$$

Мы выяснили ранее, что имеется единственная допустимая экстремаль $\hat{x} = t$, доставляющая слабый локальный минимум в задаче и не доставляющая сильного. При этом нами была построена последовательность допустимых (в задаче на сильный экстремум) функций $x_n \in PC^1([t_0, t_1])$, $x_n(\cdot) \to \hat{x}(\cdot)$ в $C([t_0, t_1])$, для которой $I\big(x_n(\cdot)\big) \to -\infty$ при $n \to \infty$.

Поскольку $\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) = 6\dot{\hat{x}}(t) = 6 > 0 \ \forall\, t \in [0, 1]$, то выполняется усиленное условие Лежандра.

Выпишем уравнение Якоби, которое является уравнением Эйлера по h

$$-\frac{d}{dt}\widetilde{L}_{\dot{h}}(t) + \widetilde{L}_h(t) = 0$$

для интегранта $\widetilde{L} = \widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}\dot{h}^2 + 2\widehat{L}_{\dot{x}x}\dot{h}h + L_{xx}h^2 = 6\dot{h}^2$:

$$-\frac{d}{dt}12\dot{h} = 0 \iff \ddot{h} = 0.$$

Общее решение уравнения Якоби: $h = C_1 t + C_2$. Начальным условиям $h(0) = 0$, $\dot{h}(0) = 1$, удовлетворяет функция $\hat{h}(t) = t$. Эта функция не имеет нулей в полуинтервале $(0, 1]$. Значит, сопряженных точек нет, и стало быть выполнено усиленное условие Якоби. По теореме 3 выполнено достаточное условие слабого локального минимума, значит $\hat{x} \in \mathrm{wlocmin}$.

Поскольку функция $L = \dot{x}^3$ не выпукла по $\dot{x}$, то достаточное условие сильного минимума не выполняется. Проверим необходимое условие сильного минимума — условие Вейерштрасса:

$$\mathcal{E}(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}, u) = L(t, \hat{x}, u) - L(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}) - \widehat{L}_{\dot{x}}(t)(u - \dot{x}) =$$
$$= u^3 - \dot{\hat{x}}^3 - 3\dot{\hat{x}}^2(u - \dot{\hat{x}}) = u^3 - 1 - 3(u - 1) \geqslant 0 \ (?)$$
$$\forall\, u \in \mathbf{R}, \ \forall\, t \in [0, 1].$$

Оно не выполняется. Так как не выполняется необходимое условие, то функция $\hat{x}$ не доставляет сильного локального минимума.

Пример 2.

Исследуем с помощью условий второго порядка задачу, рассмотренную нами в главе 3 п. 1.6 (пример 2):

$$I(x(\cdot)) = \int_0^{3\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2)\,dt \to \inf; \quad x(0) = x\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0.$$

Уравнение Эйлера:

$$\ddot{x} + x = 0.$$

Мы выяснили ранее, что имеется единственная допустимая экстремаль $\hat{x} = 0$, не доставляющая даже слабого локального минимума в задаче. При этом нами была построена последовательность допустимых функций $x_n(t) = \frac{1}{n}\sin\frac{2t}{3}$, $x_n(\cdot) \to \hat{x}(\cdot)$ в $C^1([0,1])$, для которых $I(x_n(\cdot)) < 0 = I(\hat{x}(\cdot))$.

Поскольку $\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) = 2 > 0 \quad \forall\, t \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$, то выполняется усиленное условие Лежандра.

Выпишем уравнение Якоби, которое является уравнением Эйлера по h

$$-\frac{d}{dt}\widetilde{L}_{\dot{h}}(t) + \widetilde{L}_h(t) = 0$$

для интегранта

$$\widetilde{L} = \widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}\dot{h}^2 + 2\widehat{L}_{\dot{x}x}\dot{h}h + \widehat{L}_{xx}h^2 = 2\dot{h}^2 - 2h^2\colon\ \ddot{h} + h = 0 \iff$$
$$h = C_1\sin t + C_2\cos t.$$

Начальным условиям $h(0) = 0$, $\dot{h}(0) = 1$, удовлетворяет функция $\hat{h}(t) = \sin t$. Эта функция в интервале $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ обращается в ноль в точке $\tau = \pi$. Таким образом, в интервале $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ имеется сопряженная точка, и стало быть не выполнено необходимое условие Якоби слабого локального минимума, значит допустимая экстремаль $\hat{x}(\cdot)$ не доставляет в задаче слабый минимум, и тем более не доставляет сильный минимум.

Если воспользоваться теоремой 5 о необходимых и достаточных условиях экстремума в простейшей задаче вариационного исчисления с квадратичным функционалом, то из того, что не выполнено условие Якоби, будет следовать, что абсолютный минимум в задача равен $-\infty$.

Уравнение Эйлера совпало с уравнением Якоби. Это не случайно. Так бывает, если интегрант исходной задачи является квадратичной функцией от $x, \dot{x}$.

Пример 3 (простейшая векторная задача КВИ, в которой допустимая экстремаль единственна и доставляет сильный экстремум).

$$I(x(\cdot)) = I(x_1(\cdot), x_2(\cdot)) = \int_0^1 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2x_1x_2)\,dt \to \inf;$$
$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_1(1) = \sin 1, \quad x_2(1) = -\sin 1.$$

Условие экстремума I порядка — *система уравнений Эйлера*:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = x_2, \\ \ddot{x}_2 = x_1, \end{cases} \Rightarrow x_1^{(4)} = x_1.$$

Общее решение: $\begin{cases} x_1 = C_1\operatorname{sh} t + C_2\operatorname{ch} t + C_3\sin t + C_4\cos t, \\ x_2 = C_1\operatorname{sh} t + C_2\operatorname{ch} t - C_3\sin t - C_4\cos t. \end{cases}$

Начальные условия:

$$\begin{cases} x_1(0) = C_2 + C_4 = 0, \\ x_2(0) = C_2 - C_4 = 0, \end{cases} \Rightarrow C_2 = C_4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = C_1\operatorname{sh} t + C_3\sin t, \\ x_2 = C_1\operatorname{sh} t - C_3\sin t, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(1) = C_1\operatorname{sh} 1 + C_3\sin 1 = \sin 1, \\ x_2(1) = C_1\operatorname{sh} 1 - C_3\sin 1 = -\sin 1, \end{cases} \Rightarrow C_1 = 0,\ C_3 = 1.$$

Единственная допустимая экстремаль $\hat{x}_1 = \sin t$, $\hat{x}_2 = -\sin t$.

Условия экстремума II порядка.

Условие Лежандра. $\widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}} = \begin{pmatrix} \widehat{L}_{\dot{x}_1\dot{x}_1} & \widehat{L}_{\dot{x}_1\dot{x}_2} \\ \widehat{L}_{\dot{x}_2\dot{x}_1} & \widehat{L}_{\dot{x}_2\dot{x}_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Эта матрица положительно определена, следовательно, выполняется усиленное условие Лежандра.

Условие Якоби.

$$\widehat{L}_{\dot{x}x} = \begin{pmatrix} \widehat{L}_{\dot{x}_1x_1} & \widehat{L}_{\dot{x}_1x_2} \\ \widehat{L}_{\dot{x}_2x_1} & \widehat{L}_{\dot{x}_2x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{L}_{x_1\dot{x}_1} & \widehat{L}_{x_1\dot{x}_2} \\ \widehat{L}_{x_2\dot{x}_1} & \widehat{L}_{x_2\dot{x}_2} \end{pmatrix} = \widehat{L}_{x\dot{x}},$$

$$\widehat{L}_{xx} = \begin{pmatrix} \widehat{L}_{x_1x_1} & \widehat{L}_{x_1x_2} \\ \widehat{L}_{x_2x_1} & \widehat{L}_{x_2x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Квадратичный интегрант

$$\widetilde{L}(t, h, \dot{h}) = \langle \widehat{L}_{\dot{x}\dot{x}}\dot{h}, \dot{h}\rangle + 2\langle \widehat{L}_{x\dot{x}}\dot{h}, h\rangle + \langle \widehat{L}_{xx}h, h\rangle =$$
$$= \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right\rangle =$$
$$= 2\dot{h}_1^2 + 2\dot{h}_2^2 + 4h_1h_2.$$

Система уравнений Якоби (Эйлера для квадратичного интегранта $\widetilde{L}$):

$$\begin{cases} \ddot{h}_1 = h_2, \\ \ddot{h}_2 = h_1, \end{cases} \Rightarrow h_1^{(4)} = h_1.$$

Ищем фундаментальную систему решений уравнения Якоби — матрицу $H(t) = (h^1(t)\,h^2(t)) = \begin{pmatrix} h_1^1(t) & h_1^2(t) \\ h_2^1(t) & h_2^2(t) \end{pmatrix}$ такую, что $H(0) = 0$ (нулевая матрица), $\dot H(0) = I$ (единичная матрица). Для вектора $h^1(t) = \begin{pmatrix} h_1^1(t) \\ h_2^1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1\operatorname{sh} t + C_2\operatorname{ch} t + C_3\sin t + C_4\cos t \\ C_1\operatorname{sh} t + C_2\operatorname{ch} t - C_3\sin t - C_4\cos t \end{pmatrix}$ должны выполняться условия

$$\begin{cases} h_1^1(0) = C_2 + C_4 = 0, \\ h_2^1(0) = C_2 - C_4 = 0, \\ \dot h_1^1(0) = C_1 + C_3 = 1, \\ \dot h_2^1(0) = C_1 - C_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow C_2 = C_4 = 0,\ C_1 = C_3 = \frac{1}{2}.$$

Отсюда $h^1(t) = \begin{pmatrix} \frac{\operatorname{sh} t + \sin t}{2} \\ \frac{\operatorname{sh} t - \sin t}{2} \end{pmatrix}$. Аналогично находим: $h^2(t) = \begin{pmatrix} \frac{\operatorname{sh} t - \sin t}{2} \\ \frac{\operatorname{sh} t + \sin t}{2} \end{pmatrix}$.

Сопряженные точки являются корнями уравнения

$$\det H(\tau) = 0 \iff \det \begin{pmatrix} \frac{\operatorname{sh}\tau + \sin\tau}{2} & \frac{\operatorname{sh}\tau - \sin\tau}{2} \\ \frac{\operatorname{sh}\tau - \sin\tau}{2} & \frac{\operatorname{sh}\tau + \sin\tau}{2} \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$(\operatorname{sh}\tau + \sin\tau)^2 - (\operatorname{sh}\tau - \sin\tau)^2 = 0 \iff \operatorname{sh}\tau\sin\tau = 0 \iff \tau = k\pi,\ k \in \mathbb{N}.$$

На полуинтервале $(0, 1]$ нет сопряженных точек, следовательно, выполняется усиленное условие Якоби. По теореме 3 п. 1.4.6 вектор $\hat x = (\hat x_1, \hat x_2) = (\sin t, -\sin t) \in \mathrm{wlocmin}$.

Условие Вейерштрасса — необходимое условие сильного минимума — выполняется:

$$E(t, \hat x, \dot{\hat x}, u) := L(t, \hat x, u) - L(t, \hat x, \dot{\hat x}) - \langle L_{\dot x}(t, \hat x, \dot{\hat x}), u - \dot{\hat x}\rangle =$$

$$= u_1^2 + u_2^2 + 2\hat x_1\hat x_2 - \dot{\hat x}_1^2 - \dot{\hat x}_2^2 - 2\hat x_1\hat x_2 - \left\langle \begin{pmatrix} 2\dot{\hat x}_1 \\ 2\dot{\hat x}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 - \dot{\hat x}_1 \\ u_2 - \dot{\hat x}_2 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= (u_1 - \dot{\hat x}_1)^2 + (u_2 - \dot{\hat x}_2)^2 \geqslant 0 \quad \forall\,(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall\, t \in [0, 1].$$

Выпуклость интегранта по $\dot x$. Функция $L(t, x, \dot x) = \dot x_1^2 + \dot x_2^2 + 2x_1x_2$ выпукла по $\dot x$, так как $\widehat L_{\dot x\dot x}$ — положительно определенная матрица для любых $(t, x) \in \mathbb{R}^3$. По теореме 4 п. 1.4.7 вектор $\hat x = (\hat x_1, \hat x_2) \in \mathrm{locmin}$ (сильный). (Отметим, что из условия выпуклости интегранта L по $\dot x$ следует выполнение условия Вейерштрасса.)

Если воспользоваться теоремой 5 п. 1.4.8 для квадратичных функционалов, то получим, что $\hat x = (\hat x_1, \hat x_2) \in \mathrm{absmin}$ (и слабый, и сильный).

1.7. Задачи

1.1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\dot x^2 - x^2 + 4x\cos t)\,dt \to \mathrm{extr};\quad x(0) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

1.2. $\displaystyle\int_0^{3\pi/2} (\dot x^2 - x^2 - 4x\sin t)\,dt \to \mathrm{extr};\quad x(0) = x\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0.$

1.3. $\displaystyle\int_0^1 (\dot x^2 + 3x^2)e^{2t}\,dt \to \mathrm{extr};\quad x(0) = 1,\ x(1) = e.$

1.4. $\displaystyle\int_0^1 (x^2 - \dot x^2)e^{2t}\,dt \to \mathrm{extr};\quad x(0) = 0,\ x(1) = e.$

1.5. $\displaystyle\int_0^1 \sin\dot x\,dt \to \mathrm{extr};\quad x(0) = 0,\ x(1) = \frac{\pi}{2}.$

1.6. $\displaystyle\int_0^1 \cos\dot x\,dt \to \mathrm{extr};\quad x(0) = 0,\ x(1) = \pi.$

1.7. $\displaystyle\int_0^{T_0} \dot x e^{\dot x}\,dt \to \mathrm{extr};\quad x(0) = 0,\ x(T_0) = \xi.$

1.8. $\displaystyle\int_0^1 \dot x^2 e^{\dot x}\,dt \to \mathrm{extr};\quad x(0) = 0,\ x(1) = 2.$

1.9. $\displaystyle\int_0^1 (\dot x^3 + 4\dot x^2)\,dt \to \mathrm{extr};\quad x(0) = 0,\ x(1) = -1.$

1.10. $\displaystyle\int_0^{3/2} (\dot x^3 + 2x)\,dt \to \mathrm{extr};\quad x(0) = 0,\ x\left(\frac{3}{2}\right) = 1.$

1.11. $\displaystyle\int_0^{T_0} (\dot x^5 + 5x)\,dt \to \mathrm{extr};\quad x(0) = 0,\ x(T_0) = \xi.$

1.12. $\displaystyle\int_0^1 (1 - \dot x^2)^2\,dt \to \mathrm{extr};\quad x(0) = 0,\ x(1) = \xi.$

Ответы к задачам главы 5

1. $\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\sin t \in \mathrm{absmin}$; $S_{\max} = +\infty$.
2. $t\cos t \notin \mathrm{wlocextr}$; $S_{\min} = -\infty$; $S_{\max} = +\infty$.
3. $e^t \in \mathrm{absmin}$; $S_{\max} = +\infty$.
4. $te^{2-t} \in \mathrm{absmax}$; $S_{\min} = -\infty$.
5. $S_{\min} = -1$, $\frac{\pi t}{2} \in \mathrm{absmax}$; $S_{\max} = 1$.
6. $\pi t \in \mathrm{absmin}$; $S_{\min} = -1$; $S_{\max} = 1$.
7. $\frac{\xi}{T_0} > -2 \Rightarrow \hat{x} = \frac{\xi t}{T_0} \in \mathrm{wlocmin}, \notin \mathrm{strlocmin}$; $\frac{\xi}{T_0} < -2 \Rightarrow \hat{x} \in \mathrm{wlocmax}$, $\notin \mathrm{strlocmax}$; $\frac{\xi}{T_0} = -2 \Rightarrow \hat{x} \notin \mathrm{wlocextr}$; $S_{\min} = -\infty$; $S_{\max} = +\infty$.
8. $2t \in \mathrm{wlocmin}$; $S_{\max} = +\infty$.
9. $-t \in \mathrm{wlocmin}, \notin \mathrm{strlocmin}$; $S_{\min} = -\infty$; $S_{\max} = +\infty$.
10. $\left(\frac{2}{3}t\right)^{\frac{3}{2}} \notin \mathrm{wlocextr}$; $S_{\min} = -\infty$; $S_{\max} = +\infty$.
11. $\xi > \frac{4}{5}T_0^{\frac{5}{4}} \Rightarrow \hat{x} = \frac{4}{5}\left((t+C)^{\frac{5}{4}} - C^{\frac{5}{4}}\right) \in \mathrm{wlocmin}$, $\notin \mathrm{strlocmin}$; $\xi < -\frac{4}{5}T_0^{\frac{5}{4}} \Rightarrow -\hat{x} \in \mathrm{wlocmax}$, $\notin \mathrm{strlocmax}$, где константа C отыскивается из граничного условия на правом конце: $\frac{4}{5}\left((t+C)^{\frac{5}{4}} - C^{\frac{5}{4}}\right) = |\xi|$; $\xi = \frac{4}{5}T_0^{\frac{5}{4}} \Rightarrow \hat{x} = \frac{4}{5}t^{\frac{5}{4}} \notin \mathrm{strlocextr}$; $\xi = -\frac{4}{5}T_0^{\frac{5}{4}} \Rightarrow \hat{x} = -\frac{4}{5}t^{\frac{5}{4}} \notin \mathrm{strlocextr}$; $|\xi| < \frac{4}{5}T_0^{\frac{5}{4}} \Rightarrow$ допустимых экстремалей нет; $S_{\min} = -\infty$; $S_{\max} = +\infty$.
12. $|\xi| > \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \hat{x} = \xi t \in \mathrm{wlocmin}$, $\notin \mathrm{strlocmin}$; $|\xi| < \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \hat{x} \in \mathrm{wlocmax}$, $\notin \mathrm{strlocmax}$; $S_{\min} = \begin{cases} 0, & |\xi| \leqslant 1, \\ (\xi^2-1)^2, & |\xi| \geqslant 1; \end{cases}$ $S_{\max} = +\infty$.

Список литературы к части I

[1] [АГТ] *Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М.* Сборник задач по оптимизации. М.: Наука, 1984.

[2] [АТФ] *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.

[3] *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Методы оптимизации. Минск. Изд-во БГУ, 1981.

[4] [ГТ] *Галеев Э. М., Тихомиров В. М.* Краткий курс теории экстремальных задач. М.: Изд-во МГУ, 1989.

[5] *Галеев Э. М., Кушниренко А. Г., Тихомиров В. М.* Сборник задач по оптимальному управлению. М.: Изд-во МГУ, 1980.

[6] *Галеев Э. М.* Классическое вариационное исчисление, оптимальное управление. М.: Изд-во МГГА, 1995.

[7] *Галеев Э. М.* Линейное программирование. М.: Изд-во МГГА, 1995.

[8] *Галеев Э. М.* Экстремальные задачи. М.: Изд-во МГГА, 1996.

[9] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.

[10] *Демидович Б. П и Марон И. А.* Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1966.

[11] *Заславский Ю. Л.* Сборник задач по линейному программированию. М.: Наука, 1969.

[12] *Карманов В. Г.* Математическое программирование. М.: Наука, 1980.

[13] *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1975.

[14] *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

[15] *Саульев В. К.* Прикладная и вычислительная математика. Вып. 3. Изд-во МАИ, 1971.

[16] *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, тт. 1, 2. М.: Наука, 1969.

Часть II

Глава 6

Общая теория экстремальных задач

§ 0. Введение

В мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума.

Л. Эйлер

Первой задачей на максимум, обсуждавшейся в научной литературе, принято считать классическую изопериметрическую задачу о кривой заданной длины, охватывающей максимальную площадь, стимулом для постановки которой был для древних поиск совершенных форм. Две знаменитые задачи XVII века — задача И. Бернулли о брахистохроне (кривой наискорейшего спуска) и аэродинамическая задача Ньютона (о поверхности вращения, испытывающего наименьшее сопротивление) были вызваны к жизни проблемами механики и техники, а рождение линейного программирования (транспортная задача, задача об оптимальном распределении ресурсов и др.) — запросами экономики и военно-промышленного комплекса. Огромное число задач на экстремум породили проблемы автоматического регулирования, космической навигации и другие задачи управления в технике. Об этом уже было сказано в первой части книги. Так что теория экстремума имеет весьма важные приложения.

В этой главе (написанной на основе записок лекций, читавшихся В. М. Тихомировым на механико-математическом факультете МГУ в осеннем семестре 1998 года) делается попытка вскрыть основные принципы, на которых базируется теория экстремума (в основном, в части, связанной с необходимыми условиями).

Прежде, чем переходить к изложению этих принципов, нужно кое о чем напомнить.

0.1. Основные темы и принципы общей теории экстремума

Вследствие того, что экстремальные задачи (как правило) изначально описываются на языке той области науки, в которой они возникли, необходим перевод такого описания на язык математического анализа. Он называется *формализацией задачи*.

Далее употреблется, как и в части I, такая запись формализованной проблемы:

$$f_0(x) \to \min(\max); \quad x \in D. \qquad (P)$$

В связи с каждой экстремальной задачей (P) можно поставить такие вопросы:

1) каковы необходимые условия экстремума в задаче?

2) каковы достаточные условия экстремума и как изменяются решения при изменении параметров задачи?

3) существует ли решение задачи? и

4) возможно ли найти решение явно и, если это затруднительно, то как найти его численно?

В теории экстремума выделяются в соответствии с этими вопросами следующие четыре основных темы: необходимые условия; возмущения экстремальных задач и достаточные условия; расширения экстремальных задач и существование решений и алгоритмы отыскания решений.

В каждой из перечисленных тем можно выделить одну или несколько важнейших общих идей (принципов), которые являются стержневыми в соответствующей части теории. Сформулируем их.

Во всех задачах, о которых речь шла в предыдущих главах и многих других, сосуществуют (хотя это нередко затруднительно усмотреть) две структуры — гладкая и выпуклая. К таковым относятся гладкие задачи с ограничениями типа равенств и неравенств, задачи выпуклого программирования, классического вариационного исчисления, оптимального управления, ляпуновские задачи, задачи с распределенными параметрами и другие.

Одной из фундаментальных идей, которые дают возможность проявиться выпуклости в задачах вариационного исчисления и оптимального управления, является следующая: интегральные отображения, построенные по непрерывной мере имеют выпуклые (или почти выпуклые) образы. Формой проявления этой идеи служит, например, теорема Ляпунова о векторных мерах (о ней говорится дальше).

А теперь сформулируем основные тезисы, касающиеся тех четырех тем, о которых говорилось.

Тезис первый: ***необходимые условия экстремума в задачах, где сосуществуют гладкая и выпуклая структуры, соответствуют одному общему принципу — принципу Лагранжа снятия ограничений.***

Принцип Лагранжа состоит в снятии ограничений с помощью функции Лагранжа: ***условия экстремума в задаче с ограничениями совпадают с условиями экстремума функции Лагранжа в задаче без ограничений*** *(или с ограничениями, не включенными в функцию Лагранжа)*. Принципу Лагранжа посвящен § 1 этой главы.

Тезис второй. Одной из центральных идей теории экстремума является мысль, выраженная Гамильтоном: *следует рассматривать не одну задачу, а семейство задач, включающее данную*. Такой подход предоставляет богатые возможности для исследования индивидуальной, исходной задачи. При этом, в частности, оказывается, что, если необходимые условия обладают определенной невырожденностью (в случае выпуклых задач, к примеру, — если множитель Лагранжа при функционале не равен нулю), то принцип Лагранжа о снятии ограничений может быть доведен до логического конца: *можно так слегка видоизменить функцию Лагранжа, что она сама будет иметь минимум в задаче без ограничений* (в выпуклом случае и видоизменять не нужно). Этот тезис кратко затрагивается в § 2.

Тезис третий: *основным принципом доказательства теорем существования решения экстремальных задач является принцип компактности*[1]*; очень широкий круг задач имеет решение, нередко, впрочем, в некоем обобщенном толковании этого понятия.*

Эту мысль выразил Гильберт при формулировке двадцатой из его знаменитых проблем (см. эпиграф к § 3 этой главы).

Тема «существование и расширения экстремальных задач» обсуждается в § 3. Решения задач на экстремум делятся на две группы: получаемые с помощью необходимых условий и непосредственным минимизированием функционала. В последнем случае поиски экстремума называют *прямыми*.

Тезис четвертый. Алгоритмы нахождения решений конечномерных экстремальных задач, применяемые в прямых методах, основываются на идеях *целесообразного спуска*, а также *методах отсечения и штрафа*. Бесконечномерные задачи редуцируются к последовательности конечномерных методами разумной дискретизации. Об алгоритмах говорится в § 4.

§ 5 посвящен обсуждению конкретных задач. В § 6 делаются заключительные замечания и ставятся проблемы.

0.2. Классы экстремальных задач

Далее будут исследоваться следующие совокупности экстремальных задач:

1) *Задачи математического программирования*. Они формализуются так:

$$f_0(x) \to \min;\ f_i(x) \leqslant 0,\ 1 \leqslant i \leqslant m,\ F(x) = 0, \quad x \in A, \qquad (P_1)$$

[1] Принцип компактности Вейерштрасса—Лебега: полунепрерывная снизу на компакте функция достигает своего минимума.

где X — линейное (векторное) пространство, $f_i\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ — функционалы на X, $F\colon X \to Y$, где Y — другое векторное пространство, A — некоторое подмножество X. Это общая задача математического программирования, которая будет нами рассматриваться. Если X и Y — банаховы пространства, f_i и F — дифференцируемы, а ограничение $x \in A$ — отсутствует, задачу (P_1) мы называем *гладкой задачей с ограничениями типа равенств и неравенств*. Если X и Y — векторные пространства, f_i — выпуклые функции, F — аффинное отображение, а A — выпуклое множество, задачу (P_1) мы называем *задачей выпуклого программирования* или просто *выпуклой задачей*. Если в выпуклой задаче X и Y — линейные пространства (обычно конечномерные), функции f_i — линейны, а множество A — полиэдральный конус, то задачу (P_1) называют *задачей линейного программирования*. Если функционал квадратичен, а ограничения линейны, то (P_1) называют задачей *квадратичного программирования*.

2) *Задачи вариационного исчисления и оптимального управления*. Мы будем изучать, в основном, задачи такого рода:

$$\mathcal{B}_0(\xi) \to \min;\quad \mathcal{B}_i(\xi) \leqslant 0,\ i = 1,\dots,m',\quad \mathcal{B}_i(\xi) = 0,\quad i = m'+1,\dots,m,$$
$$\dot{x}(t) - \varphi(t, x(t), u(t)) = 0 \quad \forall\, t \in \Delta,\quad u \in U, \qquad (P_2)$$

где $\xi = (x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) \in \Xi = PC^1(\Delta, \mathbb{R}^n) \times PC(\Delta, \mathbb{R}^r) \times \mathbb{R}^2$, Δ — заданный конечный отрезок, $t_0, t_1 \in \Delta$, $U \in \mathbb{R}^r$ (PC — пространство кусочно-непрерывных, а PC^1 — кусочно-непрерывно-дифференцируемых функций), $\mathcal{B}_i(\xi) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L_i(t, x(t), u(t))\, dt + l_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))$, $i = 0, 1, \dots, m$.

Переменные $x \in \mathbb{R}^n$ называют *фазовыми*, переменные $u \in \mathbb{R}^r$ — *управлениями*, функционал $\mathcal{B}_i$ — *функционалом Больца*, функции L_i — *интегрантами*, а l_i — *терминантами*. Условие $\dot{x} = \varphi$ называется *дифференциальным ограничением* или *дифференциальной связью*. Все функции $(L_i,\ l_i,\ \varphi)$ предполагаются по крайней мере непрерывными.

Если ограничение на управление типа включений $u \in U$ отсутствует, задачу (P_2) называют *задачей Лагранжа классического вариационного исчисления (в понтрягинской форме)*, если это ограничение присутствует — *задачей оптимального управления в понтрягинской форме*. Часто встречаются также задачи *с фазовыми ограничениями* типа $g(t, x(t)) = 0$ или $G(t, x(t)) \leqslant 0$, где g и G — непрерывные вектор-функции. Возможны и смешанные ограничения $g(t, x(t), u(t)) = 0$ и $G(t, x(t), u(t)) \leqslant 0$.

Если интегранты не зависят от фазовых координат, время фиксировано, терминанты выпуклы по x и дифференциальная связь отсутствует, задача (P_2) называется *ляпуновской*. Частными случаями задачи Лагранжа является задача Больца, простейшая задача классического вариационного исчисления, задачи со старшими производными и другие задачи, подробно изученные в части I.

0.3. О базе теории

Базой теории экстремума являются линейный и выпуклый анализ, аппаратом — дифференциальное и выпуклое исчисление.

В гладком анализе важнейшую роль играет теорема об обратном отображении. Фундаментом выпуклого анализа являются теоремы отделимости. Для нас достаточной окажется теорема Люстерника, которая была доказана в первой части.

Приведем ряд теорем выпуклого анализа. Подробнее см. [МИ-Т].

Теорема (Фенхеля—Моро). *Для того, чтобы имело место равенство $f^{**} = f$ необходимо и достаточно, чтобы $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ была выпукла и замкнута.*

Эта теорема служит основанием для теории двойственности выпуклых функций.

Доказательство. *Необходимость.* Если $f = f^{**}$, то из определений следует, что $\operatorname{epi} f$ есть пересечение надграфиков аффинных функций $\{\langle x^*, \cdot\rangle - f^*(x^*) \mid x^* \in X^*\}$, т. е. выпуклое и замкнутое множество.

Достаточность. Если $f \equiv \infty$, то $f = f^{**}$ следует из определений. Пусть f выпукла, замкнута и существует точка x_0, где $|f(x_0)| < \infty$. Строго отделим точку $(x_0, f(x_0) - 1)$ от $\operatorname{epi} f$, т. е. найдем (x_0^*, β_0) такие, что

$$\langle x_0^*, x\rangle + \alpha\beta_0 < \langle x_0^*, x_0\rangle + \beta_0\big(f(x_0) - 1\big) = c_0 \quad \forall (x, \alpha) \in \operatorname{epi} f.$$

Отсюда следует, что $\beta_0 < 0$ и можно считать, что $\beta_0 = -1$. Мы построили аффинную функцию $a_0(\cdot) = \langle x_0^*, \cdot\rangle - c_0$, график которой расположен под графиком функции f.

Допустим, что в некоторой точке x_1 выполнено неравенство $f(x_1) > f^{**}(x_1)$ (неравенство $f^{**}(x) \leqslant f(x)$ следует из определений). Если $f(x_1) < \infty$, то отделяем точку $(x_1, f^{**}(x_1))$ от $\operatorname{epi} f$, как это было проделано выше, аффинной функцией $a_1(\cdot) = \langle x_1^*, \cdot\rangle - c_1$, и получаем, что $\langle x_1^*, x\rangle - c_1 \leqslant f(x)$ $\forall x$, значит $f^*(x_1^*) \leqslant c_1$ и $\langle x_1^*, x_1\rangle - c_1 > f^{**}(x_1)$, т. е. $\langle x_1^*, x_1\rangle > f^*(x_1^*) + f^{**}(x_1)$, что противоречит неравенству Юнга. Если же $f(x_1) = \infty$, снова отделяем точку $\big(x_1, f^{**}(x_1)\big)$ от $\operatorname{epi} f$. Если отделение происходит с помощью аффинной функции, приходим, как только что это произошло чуть выше, к противоречию с неравенством Юнга. Если же отделение происходит с помощью функционала $\bar{x}_1^*$ такого, что $\langle \bar{x}_1^*, x_1\rangle > c$ и $\langle \bar{x}_1^*, x\rangle \leqslant c$ $\forall (x, \alpha) \in \operatorname{epi} f$, то построим семейство аффинных функций $a_\mu(\cdot) = a_0(\cdot) + \mu(\langle \bar{x}_1^*, \cdot\rangle - c)$. При достаточно большом μ эта аффинная функция (которая всегда лежит под графиком f) будет превосходить в точке x_1 число $f^{**}(x_1)$ и это приведет к противоречию с неравенством Юнга. ∎

Таким образом, эта теорема утверждает, что выпуклая замкнутая функция, определяемая, с одной стороны, своим надграфиком, является с другой стороны и верхней гранью семейства непрерывных (в топологии $\sigma(X, X^*)$) аффинных функций $x \to \langle x^*, x\rangle - f^*(x^*)$, $x^* \in X^*$. В этом состоит факт двойственности выпуклых функций.

Приведем теперь общую схему построения двойственной задачи к данной. Пусть X — нормированное пространство, X^* сопряженное к нему и $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$. Рассмотрим задачу

$$f(x) \to \min; \quad x \in X. \tag{$\mathcal{P}$}$$

Пусть, далее, Y и Y^* — другая пара пространств и функция $F\colon X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ такова, что $F(x, 0) = f(x)$ для всех $x \in X$. Каждому $y \in Y$ сопоставим задачу:

$$F(x, y) \to \min; \quad x \in X. \tag{$\mathcal{P}_y$}$$

Семейство таких задач называется *возмущением задачи* $(\mathcal{P})$. *Двойственной задачей к* $(\mathcal{P})$ (относительно заданного возмущения) называется задача

$$-F^*(0, y^*) \to \max, \quad y^* \in Y^*, \tag{$\mathcal{P}^*$}$$

где $F^*\colon X^* \times Y^* \to \overline{\mathbb{R}}$ — сопряженная функция к F (относительно естественной двойственности между $X \times Y$ и $X^* \times Y^*$).

В основе этой схемы лежит все та же двойственность выпуклых функций. Действительно, если $S(y)$ — значение задачи $(\mathcal{P}_y)$, то согласно предыдущему $S(0) \geqslant S^{**}(0) = \sup_{y^* \in Y^*}\big(-S^*(y^*)\big)$. По определению

$$S^*(y^*) = \sup_{y \in Y}\big(\langle y^*, y\rangle_2 - \inf_{x \in X} F(x, y)\big) =$$
$$= \sup_{x \in X, y \in Y}\big(\langle x^*, 0\rangle_1 + \langle y^*, y\rangle_2\big) - F(x, y) = F^*(0, y^*)$$

и тем самым очевидна связь задач $(\mathcal{P})$ и $(\mathcal{P}^*)$ и понятно, что условия совпадения их значений могут быть получены из теоремы Фенхеля—Моро. Из приведенных рассуждений вытекает, что значение двойственной задачи не превосходит значения исходной.

Приведем еще одно следствие из теоремы Фенхеля—Моро.

Следствие (о субдифференциале и опорной функции). *Для того, чтобы имело место равенство $\partial sA = A$, необходимо и достаточно, чтобы множество A было выпукло и замкнуто; для того, чтобы имело место равенство $s\partial p = p$, необходимо и достаточно, чтобы сублинейная функция p была замкнутой.*

Теорема Моро—Рокафеллара. *Пусть $f_i\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $i = 1, 2$ — выпуклые собственные функции и существует такая точка, в которой обе функции* *конечны и хотя бы одна из них непрерывна. Тогда для всех* $x \in \operatorname{dom} f_1 \cap \operatorname{dom} f_2$ *справедлива формула*

$$\partial(f_1 + f_2)(x) = \partial f_1(x) + \partial f_2(x).$$

Доказательство. В силу того очевидного факта, что $(f_1 + f_2)'(x;\cdot) = f_1'(x;\cdot) + f_2'(x;\cdot)$, $x \in X$ (где $f'(x,\cdot)$ — производная по направлению функции f в точке x; если f выпукла, $f'(x,\cdot)$ — сублинейна), достаточно доказать теорему для сублинейных функций $p_i(\cdot) = f_i'(x;\cdot)$, $i = 1,2$. Мы ограничимся случаем, когда одна из них, скажем, p_1 замкнута, а другая непрерывна (и тем самым также замкнута). В этом случае ∂p_2 есть компакт и поэтому множество $\partial p_1 + \partial p_2$ замкнуто (это нетрудное упражнение из топологии). Нам еще понадобится одно соотношение: $s(A_1 + A_2) = sA_1 + sA_2$ (i), верное для любых множеств A_1 и A_2 из X, проверка которого элементарна.

Применяя теперь следствие о субдифференциале и опорной функции и используя (i), будем иметь

$$\partial(p_1 + p_2) = \partial(s\partial p_1 + s\partial p_2) = \partial s(\partial p_1 + \partial p_2) = \partial p_1 + \partial p_2.$$

■

Теорема Дубовицкого—Милютина. *Пусть* $f_i\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $i = 1,2$ — *выпуклые функции, непрерывные в точке* $x \in X$ *и* $f_1(x) = f_2(x)$. *Тогда*

$$\partial \max(f_1, f_2)(x) = \operatorname{co}\big(\partial f_1(x) \cup \partial f_2(x)\big).$$

Доказательство. В силу легко проверяемого равенства

$$\big(\max(f_1, f_2)\big)'(x;\cdot) = \max\big(f_1'(x;\cdot), f_2'(x;\cdot)\big)$$

теорему достаточно доказать для сублинейных функций $p_i = f_i'(x;\cdot)$, $i = 1,2$. Так как f_i, $i = 1,2$, непрерывны в x, то и функции p_i, $i = 1,2$, непрерывны. Тогда по теореме о компактности субдифференциала, множества ∂p_i, $i = 1,2$, компактны, а значит, и множество $\operatorname{co}(\partial f_1(x) \cup \partial f_2(x))$ компактно (это тоже простое утверждение из топологии). Нам еще понадобится следующее, просто проверяемое равенство $s\big(\operatorname{co}(A_1 \cap A_2)\big) = \max(sA_1, sA_2)$ (i), справедливое для любых $A_i \subset X$, $i = 1,2$.

Применяя теперь последовательно первое утверждение теоремы о субдифференциале и опорной функции, (i) и затем второе утверждение упомянутой теоремы, будем иметь

$$\partial \max(p_1, p_2) = \partial \max(s\partial p_1, s\partial p_2) = \partial s\big(\operatorname{co}(\partial p_1 \cup \partial p_2)\big) = \operatorname{co}(\partial p_1 \cup \partial p_2).$$

■

Теорема Дубовицкого—Милютина имеет следующее важное обобщение:

Теорема (В. Левина об очистке). *Пусть* T — *компакт,* L_n — n*-мерное пространство,* $F\colon T \times L_n \to \mathbb{R}$, $(t,x) \to F(t,x)$ — *функция, полунепрерывная сверху по* t *при каждом фиксированном* x *и выпуклая по* x *при каждом фиксированном* t. *Положим* $f(x) = \max_{t\in T} F(t,x)$. *Тогда для любого* $y \in \partial f(\hat{x})$ *найдутся* $r \in \mathbb{N}$, $r \leqslant n+1$, $\{\tau_i\}_{i=1}^r$, $\tau_i \in T$ *такие, что*

(A) $f(\tau_i, \hat{x}) = f(\hat{x})$, $1 \leqslant i \leqslant r$,

(B) $y \in \operatorname{co}\{y_1, \dots, y_r\}$,

где $y_i \in \partial_x F(\tau_i, \hat{x})$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

Этот результат относится к еще одному важному принципу — «очистки». Весьма часто, и в случае конечно-параметрического семейства выпуклых функций это так (в этом и состоит теорема об очистке), все множество может быть заменено на свою часть с сохранением какого-то важного свойства. Так и здесь: можно выкинуть все точки множества T, кроме $n+1$ точки, и уже на семействе из $n+1$ функции минимум их максимума совпадает с минимаксом по всему семейству.

Более подробно о выпуклом анализе см. в книге [МИ-Т].

§ 1. Принцип Лагранжа для необходимых условий экстремума

«Можно высказать следующий общий принцип.

Если ищется максимум или минимум некоторой функции многих переменных при условии, что между этими переменными имеется связь, задаваемая одним или несколькими уравнениями, нужно прибавить к минимизируемой функции функции, задающие уравнения связи, умноженные на неопределенные множители, и искать затем максимум или минимум построенной суммы, как если бы переменные были независимы. Полученные уравнения, присоединенные к уравнениям связи, послужат для определения всех неизвестных».

Лагранж

Этот параграф посвящен обоснованию следующего тезиса: *необходимые условия экстремума в задачах, где воедино слиты гладкая и выпуклая структуры, соответствуют принципу Лагранжа снятия ограничений.* (Изначальный вариант принципа Лагранжа выражен в приведенном нами эпиграфе.)

Мы докажем одну общую теорему, навеянную общим замыслом Лагранжа, которая в качестве следствий содержит необходимые условия экстремума в математическом и выпуклом программировании, вариационном исчислении и оптимальном управлении, ляпуновских задачах и многих других. Но сначала мы (после формулировки теоремы) продемонстрируем, как эвристически пользоваться идеей Лагранжа, т. е. как автоматически писать правильные необходимые условия в разнообразных задачах на максимум и минимум.

1.1. Формулировка принципа Лагранжа для гладко-выпуклых задач

Пусть X и Y нормированные пространства, $\mathcal{U}$ — некоторое множество. Рассмотрим задачу:

$$f_0(x) \to \min; \quad F(x,u) = 0, \quad u \in \mathcal{U}, \tag{P}$$

где $f_0\colon U_0 \to \mathbb{R}$, $F\colon U_0 \times \mathcal{U} \to Y$, U_0 — окрестность в X. Таким образом, в рассматриваемой задаче имеются ограничения типа равенств, параметризованные множеством $\mathcal{U}$.

Мы скажем, что пара $(\hat{x}, \hat{u})$ доставляет *сильный локальный минимум в задаче* (P), если найдется $\delta > 0$ такое, что для любой пары (x,u), для которой $F(x,u) = 0$, $u \in \mathcal{U}$ и $\|x - \hat{x}\|_X < \delta$ выполняется неравенство: $f_0(x) \geqslant f_0(\hat{x})$.

Функция

$$\mathcal{L}\big((x,u),\lambda,\lambda_0\big) := \lambda_0 f_0(x) + \big\langle \lambda, F(x,u)\big\rangle, \quad \lambda_0 \geqslant 0$$

называется *функцией Лагранжа задачи* (P). Число λ_0 и элемент $\lambda \in Y^*$ называются *множителями Лагранжа* ($\langle \lambda, y\rangle$ — это действие линейного функционала $\lambda \in Y^*$ на элемент $y \in Y$).

Отображение F в (P) назовем *гладко-выпуклым* в точке $(\hat{x},\hat{u})$, если отображение $x \to F(x,u)$ непрерывно дифференцируемо по x в окрестности точки $\hat{x}$ (или даже строго дифференцируема в $\hat{x}$) для всех $u \in \mathcal{U}$, а множество $F(x,\mathcal{U})$ выпукло для всех $x \in U_0$. Если F в (P) гладко-выпукло, назовем эту задачу *гладко-выпуклой.*

Если $F'_x(\hat{x},\hat{u})X = Y$, то назовем F *регулярным* отображением, а если подпространство $F'_x(\hat{x},\hat{u})X$ замкнуто в X и имеет конечную коразмерность в Y (т. е. дополняемо до X конечномерным подпространством), отображение F назовем *слабо регулярным в точке* $(\hat{x},\hat{u})$.

Теорема (Принцип Лагранжа для гладко-выпуклых задач). *Пусть X и Y — банаховы пространства, $\mathcal{U}$ — множество, f_0 — дифференцируема в точке $\hat{x}$, а F — гладко-выпукло и слабо регулярно. Тогда если точка $(\hat{x},\hat{u})$ доставляет сильный локальный минимум задаче (P), то для задачи (P) в этой точке выполнен принцип Лагранжа. Если F регулярно, то $\lambda_0 \neq 0$.*

Расшифруем, что означает выражение «для задачи (P) в данной точке выполнен принцип Лагранжа». В задаче (P) два аргумента — x и u. В соответствии с замыслом Лагранжа, составив функцию Лагранжа, рассмотрим две подзадачи:

— гладкую задачу без ограничений $\mathcal{L}\big((x,\hat{u}),\lambda,\lambda_0\big) \to \min$;

— выпуклую задачу $\mathcal{L}\big((\hat{x},u),\lambda,\lambda_0\big) \to \min$; $u \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \langle\lambda, y\rangle \to \min$; $y \in F(\hat{x},\mathcal{U})$.

Необходимое условие экстремума в первой задаче пишется в соответствии с теоремой Ферма для гладких функций; оно состоит в *условии стационарности*

$$\mathcal{L}_x\big((\hat{x},\hat{u}),\lambda,\lambda_0\big) = 0, \quad \Leftrightarrow \lambda_0 f_0'(\hat{x}) + \big(F_x(\hat{x},\hat{u})\big)^*\lambda = 0. \tag{1}$$

Условие минимума во второй задаче запишем в виде тавтологического *принципа минимума*

$$\min_{u\in\mathcal{U}} \mathcal{L}\big((\hat{x},u),\lambda,\lambda_0\big) = \mathcal{L}\big((\hat{x},\hat{u}),\lambda,\lambda_0\big) \Leftrightarrow \big\langle \lambda, F(\hat{x},v)\big\rangle \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}. \tag{2}$$

Так что выражение «для задачи (P) выполнен принцип Лагранжа», означает, что имеют место условие стационарности (1) и принцип минимума (2). Соотношениями (1)–(2) можно пользоваться эвристически.

1.2. Доказательство принципа Лагранжа для гладко-выпуклых задач

Доказательство. В основе доказательства лежат два основополагающих факта классического и выпуклого анализа: теорема об обратном отображении и теорема отделимости.

1. Регулярный случай. Хотя доказательство принципа Лагранжа и в общем случае достаточно несложно, считаем целесообразным провести сначала доказательство в регулярном случае, где оно особенно просто, но содержит в себе все важнейшие компоненты рассуждений, приводящих к цели в общей ситуации. Здесь все основывается на теореме Люстерника.

Обозначим $F'_x(\hat{x},\hat{u}) = \Lambda$. Выбрав $u \in \mathcal{U}$ строим отображение $\Phi(\cdot,\cdot;u)\colon U_0 \times \mathbb{R} \to Y$:

$$\Phi(x,\alpha;u) := (1-\alpha)F(\hat{x}+x,\hat{u}) + \alpha F(\hat{x}+x,u).$$

Эта функция, очевидно, непрерывно дифференцируема в окрестности точки $(0,0) \in X \times \mathbb{R}$ и

$$\Phi'\big((0,0);u\big)[x,\alpha] = \Lambda x + \alpha F(\hat{x},u). \tag{i}$$

По теореме Люстерника, если $\Lambda x = 0$, то x — касательный вектор к многообразию $\{x \mid F(x,\hat{u}) = 0\}$, и значит, существует отображение $r\colon [-1,1] \to X$ такое, что $F(\hat{x} + tx + r(t),\hat{u}) = 0, r(t) = o(t)$. В силу того, что $(\hat{x},\hat{u})$ — сильный локальный минимум в задаче (P), а $\big(\hat{x} + tx + r(t),\hat{u}\big)$ — допустимая пара, получаем: $f_0(\hat{x}) \leqslant f_0\big(\hat{x} + tx + r(t)\big) = f_0(\hat{x}) + t\big\langle f_0'(\hat{x}), x\big\rangle + o(t)$, откуда вытекает, что $\big\langle f_0'(\hat{x}), x\big\rangle = 0$, т. е. $f_0'(\hat{x}) \in (\operatorname{Ker}\Lambda)^{\perp}$. Из леммы об аннуляторе ядра регулярного оператора последует тогда, что найдется элемент $\lambda \in Y^*$

такой, что $f_0'(\hat{x}) + \Lambda^*\lambda = 0$. А это равенство есть не что иное, как условие стационарности. Осталось доказать принцип минимума. Пусть v — некоторый элемент из $\mathcal{U}$. В силу условия регулярности существует элемент $x(v)$ такой, что $F_x(\hat{x},\hat{u})x(v) + F(\hat{x},v) = 0$. Это означает (см. (i)), что пара $\big(x(v),1\big) \in \big(\mathrm{Ker}\Phi'(0,0;v)\big)^\perp$. Тогда снова по теореме Люстерника найдем отображения $\big(r_v(\cdot),\rho_v(\cdot)\big)$: $[0,1] \to X\times\mathbb{R}$ такие, что для $x_v(t) = \hat{x} + tx(v) + r_v(t)$ и $\alpha_v(t) = t + \rho_v(t)$ выполнено тождество

$$\big(1-\alpha_v(t)\big)F\big(x_v(t),\hat{u}\big) + \alpha_v(t)F\big(x_v(t),v\big) = 0, \quad r_v(t) = o(t), \quad \rho_v(t) = o(t).$$

Из определения гладкой выпуклости найдем элемент $u_v(t) \in \mathcal{U}$ такой, что $F\big(x_v(t),u_v(t)\big) = 0$, и следовательно, $\big(x_v(t),u_v(t)\big)$ — допустимая пара, т. е. $f_0\big(x_v(t)\big) \geqslant f_0(\hat{x})$, откуда

$$0 \leqslant \frac{d}{dt}f_0\big(x_v(t)\big)\big|_{t=0} = \big\langle f_0'(\hat{x}),x(v)\big\rangle =$$
$$= -\big\langle \Lambda^*\lambda, x(v)\big\rangle = -\big\langle \lambda,\Lambda x(v)\big\rangle = \big\langle \lambda, F(\hat{x},v)\big\rangle.$$

Принцип минимума, а с ним и принцип Лагранжа для регулярного гладко-выпуклого случая доказан.

2. *Общий случай.* Пусть теперь F — слабо регулярно. Обозначим $L_0 = \mathrm{Im}\Lambda$, $A = F(\hat{x},\mathcal{U})$, $C = L_0 + A$. Пусть π: $Y/L_0 = Z$ — каноническая проекция. Из условия теоремы вытекает, что Z — конечномерное пространство. Надо разобрать два случая: $0 \neq \mathrm{int}\,\pi C$, $0 \in \mathrm{int}\,\pi C$ — вырожденный и невырожденный. В вырожденном случае по теореме отделимости существует $z^* \in Z^*$ такой, что $\langle z^*,z\rangle \geqslant 0$ $\forall z \in \pi C$. Положим $\lambda := \pi^* z^*$ (π^* — оператор, сопряженный к π). В силу того, что π — сюрьективный оператор, $\lambda \neq 0$. Имеем:

$$\big\langle\lambda,\Lambda x + F(\hat{x},u)\big\rangle = \big\langle\pi^*z^*,\Lambda x + F(\hat{x},u)\big\rangle =$$
$$= \big\langle z^*,\pi\big(\Lambda x + F(\hat{x},u)\big)\big\rangle \geqslant 0 \ \forall\, x\in X,\ u\in\mathcal{U} \quad \Leftrightarrow (1),\ (2).$$

Осталось рассмотреть невырожденный случай. Коль скоро $0 \in \mathrm{int}\,\pi C$, существует натуральное число m, $\{z_i\}_{i=1}^m$, $\overline{\alpha}_i > 0$ такие, что $\sum\limits_{i=1}^m \overline{\alpha}_i z_i = 0$, $z_i = \pi F(\hat{x},v_i)$ и $\mathrm{cone}\{z_i\}_{i=1}^m = Z$. Тогда по определению $\sum\limits_{i=1}^m \overline{\alpha}_i F(\hat{x},v_i) \in L_0$, т. е. существует элемент $\overline{\xi} \in X$ такой, что $\Lambda\overline{\xi} + \sum\limits_{i=1}^m \overline{\alpha}_i F(\hat{x},v_i) = 0$. Далее поступаем подобно тому, как в регулярном случае. Выбрав $v_0 \in \mathcal{U}$, определяем отображение

$$\Phi(x,\alpha_0,\alpha;v_0) := \Big(1 - \sum_{i=0}^m \alpha_i\Big)F(\hat{x}+x,\hat{u}) + \sum_{i=0}^m \alpha_i F(\hat{x}+x,v_i),$$

$$x\in X, \quad \alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_m).$$

Оно отображает $X\times\mathbb{R}^{m+1}$ в X, строго дифференцируемо и $\Phi'(0,0,\ldots,0;v_0)[x,\alpha_0,\alpha] = \Lambda x + \sum\limits_{i=0}^m \alpha_i F(\hat{x},v_i)$. Пусть $\Lambda\bar{x} + F(\hat{x},\bar{v}) = 0$. Тогда

$$\Phi'(0,0,\ldots,0;\bar{v})[\bar{x}+\varepsilon\overline{\xi},1,\varepsilon\overline{\alpha}] = \Lambda\bar{x} + F(\hat{x},\bar{v}) + \varepsilon\Big(\Lambda\overline{\xi} + \sum_{i=1}^m \overline{\alpha}_i F(\hat{x},v_i)\Big) = 0$$

и по теореме Люстерника найдутся $r(\cdot)$: $[-1,1] \to X$, ρ_i: $[-1,1]\to\mathbb{R}$, $0 \leqslant i \leqslant m$ такие, что $r(t) = o(t)$, $\rho_i(t) = o(t)$ и

$$\Phi\big(\bar{x} + t\overline{\xi} + r(t), t + \rho_0(t), \varepsilon t\overline{\alpha}_1 + \rho_1(t),\ldots,\varepsilon t\overline{\alpha}_m + \rho_m(t)\big) = 0 \ \forall t\in[-1,1].$$

Из условия выпуклости получаем, что найдется элемент $u(t) \in \mathcal{U}$ такой, что $F\big(\hat{x} + t\bar{x} + \varepsilon t\overline{\xi} + r(t), u(t)\big) = 0$, откуда $\langle f_0'(\hat{x}),\bar{x}\rangle \geqslant 0$. Положив $\bar{v} = \hat{x}$, получим, что $f_0'(\hat{x}) \in (\mathrm{Ker}\Lambda)^\perp$. Из леммы о нетривиальности аннулятора следует, что существует элемент $\lambda_1 \in L_0^*$ такой, что $f_0'(\hat{x}) + \Lambda^*\lambda_1 = 0$. Пусть теперь $F(\hat{x},u) \in L_0$. Тогда найдем элемент $x(u) \in X$ такой, что $\Lambda x(u) + F(\hat{x},u) = 0$ (vi) Следовательно,

$$0 \overset{(iv)}{\leqslant} \big\langle f_0'(\hat{x}),x(u)\big\rangle \overset{(v)}{=} -\big\langle\Lambda^*\lambda_1,x(u)\big\rangle \overset{Id}{=} \langle\lambda_1,\Lambda x(u)\rangle \overset{(vi)}{=} \langle\lambda_1,F(\hat{x},u)\rangle.$$

Наконец, из теоремы отделимости (взяв $\overline{C} = \mathrm{co}(C\cap\overline{B})$, где $\overline{B}$ шар с центром $\eta\in L_0, \langle\lambda_1,\eta\rangle > 0$, который не пересекается с $\{y \mid \langle\lambda_1,y\rangle = 0\}$, $\Rightarrow \mathrm{int}\,\overline{C} \neq \varnothing$, убеждаемся, что можно применить теорему отделимости) получим, что существует элемент $\lambda\in Y^*$ такой, что $\lambda|_{L_0} = \lambda_1$ и $\big\langle\lambda,F(\hat{x},u)\big\rangle \geqslant 0$ $\forall u$, откуда следует принцип минимума. Из первого уравнения получаем $\langle\lambda,\Lambda x\rangle = \langle\lambda_1,\Lambda x\rangle \overset{Id}{=} \langle\Lambda^*\lambda_1,x\rangle \overset{(v)}{=} -\langle f_0'(\hat{x}),x\rangle$ $\forall x$. Это — условие стационарности. Таким образом, принцип Лагранжа доказан. ■

Элементарные задачи

Принцип Лагранжа сводит вопрос о необходимых условиях задач с ограничениями к необходимым условиям для более просто устроенных (*элементарных*) задач. Сформулируем необходимые условия экстремума для четырех важнейших элементарных задач.

Элементарная гладкая задача — это задача без ограничений:

$$f(x) \to \min, \tag{I}$$

где функция f предполагается дифференцируемой. Согласно теореме Ферма необходимым условием минимума в (I) является равенство

$$f'(\hat{x}) = 0. \tag{1}$$

Аналогом теоремы Ферма для выпуклых функций является соотношение

$$0 \in \partial f(\hat{x}). \tag{1'}$$

Это необходимое и достаточное условие минимума f в точке $\hat{x}$ (ср. с п. 6.1 и (1)).

Элементарной задачей линейного программирования назовем следующую:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \to \min; \quad u_i \geqslant 0, \quad \bigl(\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n\bigr). \tag{II}$$

Необходимым и достаточным условием того, что вектор $\hat{u} \geqslant 0$ является решением этой задачи, является выполнение условий *неотрицательности и дополняющей нежесткости*:

$$\lambda_i \geqslant 0 \quad \lambda_i \hat{u}_i = 0 \quad \forall i. \tag{2}$$

Этот факт совершенно очевиден.

Элементарной задачей классического вариационного исчисления или *задачей Больца* называется такая задача:

$$B(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L\bigl(t, x(t), \dot{x}(t)\bigr)\, dt + l\bigl(x(t_0), x(t_1)\bigr) \to \min; \tag{III}$$

где $x(\cdot) = \bigl(x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot)\bigr)$ — вектор-функция, из пространства $C^1\bigl([t_1, t_2], \mathbb{R}^n\bigr)$ непрерывно-дифференцируемых вектор-функций, L и l — функции (соответственно) $2n+1$ и $2n$ переменных.

Необходимые условия экстремума в задаче Больца состоят из *уравнения Эйлера*

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}(t) + \widehat{L}_x(t) = 0 \tag{3}$$

и *условия трансверсальности* (они выполнены при условии непрерывной дифференцируемости интегранта и терминанта):

$$\widehat{L}_{\dot{x}}(t_i) = (-1)^i \hat{l}_{x(t_i)}, \quad i = 0, 1, \tag{3'}$$

где $\widehat{L}_{\dot{x}}(t) = L_{\dot{x}}\bigl(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(\cdot)\bigr)$, $\widehat{L}_x(t) = L_x\bigl(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)\bigr)$, а $\hat{l}_{x(t_i)} = l_{x(t_i)}\bigl(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1)\bigr)$ (доказательство см. в § 2 гл. 3).

Элементарной задачей оптимального управления или *простейшей ляпуновской задачей* мы называем следующую задачу:

$$B(u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} h\bigl(t, u(t)\bigr) dt \to \min; \quad u(t) \in \mathcal{U}, \tag{IV}$$

где $u(\cdot)\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^r$ — кусочно-непрерывная функция, $h(\cdot,\cdot)\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $\mathcal{U}$ — произвольное множество в $\mathbb{R}^r$, $u(t) \in \mathcal{U}$ во всех точках непрерывности.

Легко понять, что *кусочно-непрерывная вектор-функция $\hat{u}(\cdot)$ доставляет абсолютный минимум в задаче (IV) тогда и только тогда, когда в любой точке непрерывности функции $\hat{u}(\cdot)$ выполнено соотношение*:

$$\min_{u \in \mathcal{U}} h(t, u) = h\bigl(t, \hat{u}(t)\bigr). \tag{4}$$

Соотношения типа (4) называют *принципом минимума*.

Применение принципа Лагранжа для гладко-выпуклых задач к конкретным классам экстремальных проблем основывается на трех леммах — о нетривиальности аннулятора, о замкнутости образа и ядре регулярного оператора

Доказательства этих лемм см. в § 5 гл. 1.

1.3. Следствия принципа Лагранжа

Задачи математического программирования

Применение принципа Лагранжа для гладко-выпуклых задач начнем с гладких задач математического программирования:

$$f_0(x) \to \min; \quad f_i(x) \leqslant 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \quad F(x) = 0. \tag{P_1}$$

Следствие 1 (Принцип Лагранжа в математическом программировании). *Пусть в задаче (P_1) пространства X и Y — банаховы, U_0 — окрестность точки $\hat{x} \in X$, $f_i\colon U_0 \to \mathbb{R}$, $0 \leqslant i \leqslant m$, $F\colon U_0 \to Y$. Тогда, если f_i и F строго дифференцируемы, $F'(\hat{x})X$ — замкнутое подпространство Y, а $\hat{x}$ доставляет локальный минимум задаче, то для нее выполнен принцип Лагранжа. Если неравенств нет и отображение F регулярно в точке $\hat{x}$, то множитель λ_0 можно считать равным единице* (*см. п.* 8.2 *гл.* 1).

Фраза «выполнен принцип Лагранжа» в данном случае означает, что существуют не равные одновременно нулю числа $\lambda_0, \dots, \lambda_m$ и элемент $\lambda \in Y^*$, которые удовлетворяют условиям неотрицательности, дополняющей нежесткости и стационарности:

$$\mathcal{L}_x(\hat{x}, \lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_0) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i'(\hat{x}) + \bigl(F'(\hat{x})\bigr)^* \lambda = 0.$$

Действительно, если $F'(\hat{x})X$ — собственное подпространство, то по лемме о нетривиальности аннулятора найдется элемент $\lambda \neq 0$ такой, что $\mathcal{L}_x(\hat{x}, \lambda, 0, \dots, 0, 0) = 0$, а если $F'(\hat{x})X = Y$, надо положить $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m_+$, $u = (u_1, \dots, u_m)$, $\mathcal{F}(x, u) = \bigl(f_1(x) + u_1, \dots, f_m(x) + u_m, F(x)\bigr)$, $\mathcal{F}\colon X \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m \times Y$, применить сформулированную теорему (воспользовавшись леммой о замкнутости) и условия экстремума в двух названных выше элементарных задачах — гладкой без ограничений и элементарной задаче выпуклого программирования. ■

Доказанная теорема содержит в себе правило множителей Лагранжа для конечномерной гладкой задачи с равенствами (это правило, подразумевая регулярность ограничения, Лагранж сформулировал, в частности, в своей книге Лагранж [1801], из которой мы заимствовали свой эпиграф); правило множителей Лагранжа для бесконечномерной задачи с регулярными равенствами (теорему Люстерника [1934]); правило множителей Лагранжа для конечномерной гладкой задачи с равенствами и неравенствами (теорему Джона) и т. п.

Из гладко-выпуклого принципа выводится принцип Лагранжа для задач выпуклого программирования (теорема Куна—Таккера). Мы не будем проводить этого вывода, ограничившись краткой формулировкой. В выпуклых задачах принцип Лагранжа приобретает завершенную форму: *при некоторых множителях Лагранжа, удовлетворяющих условиям неотрицательности и дополняющей нежесткости, функция Лагранжа достигает в точке, являющейся решением задачи своего минимума по тем ограничениям, которые не были включены в функцию Лагранжа* (см. [МИ-Т]). Ниже мы вернемся к этому результату при обсуждении условий экстремума ляпуновских задач.

Принцип Лагранжа в задачах классического вариационного исчисления

Следствие 2 (Принцип Лагранжа в задаче Лагранжа). *Пусть в задаче (P_2) $U = \mathbb{R}^r$, $t_i = \hat{t}_i$, $i = 0, 1$ — фиксированы, и все функции L_i, l_i и отображение φ непрерывно дифференцируемы. Тогда, если $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ доставляет локальный минимум в пространстве $C^1([\hat{t}_0, \hat{t}_1], \mathbb{R}^n) \times C([\hat{t}_0, \hat{t}_1], \mathbb{R}^r)$, то в этой точке выполнен принцип Лагранжа, т. е. существуют множители Лагранжа $(p(\cdot), \lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda_0) \in C^1([\hat{t}_0, \hat{t}_1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^{m+1}$ не равные одновременно нулю и такие, что выполнено необходимое условие в задаче Больца*

$$\mathcal{L} = \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} L\big(t, x(t), \dot{x}(t), u(t)\big)\, dt + l\big(x(\hat{t}_0), x(\hat{t}_1)\big) \to \min;$$

$$L = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i L_i, \quad l = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i l_i \Rightarrow -\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot{x}}(t) + \widehat{L}_x(t) = 0,$$

$$\widehat{L}_u(t) = 0, \quad \widehat{L}_{\dot{x}}(t_i) = (-1)^i \hat{l}_{x(t_i)}, \quad i = 0, 1.$$

К этому надо присоединить условия дополняющей нежесткости и неотрицательности. Если концы свободны, надо к этим соотношениям добавить равенства нулю производных функции Лагранжа по t_i (ср. с п. 6.2 гл. 3).

Действительно, условия гладкости позволяют редуцировать эту задачу к задаче математического программирования, а условие слабой регулярности вытекает из регулярности отображения $(x(\cdot), u(\cdot)) \to \dot{x}(\cdot) - \varphi(\cdot, x(\cdot), u(\cdot))$ и леммы о замкнутости образа.

Из следствия 2 вытекают многие классические результаты, полученные на протяжении двух веков, например, необходимое условие экстремума в простейшей задаче классического вариационного исчисления — *уравнение Эйлера* (впервые это уравнение было выведено Эйлером в 1728 году); необходимое условие в изопериметрической задаче; необходимое условие в задаче со старшими производными (*уравнение Эйлера—Пуассона*); необходимые условия в задачах с подвижными концами и многое другое (см. §§ 2–5 гл. 3). Эти условия составляют основное содержание большинства учебников по вариационному исчислению. Все эти условия с помощью принципа Лагранжа выписываются автоматически и, как мы видели, единообразно выводятся, основываясь по сути дела лишь на теореме об обратной функции и трех леммах, представляющих собой бесконечномерные версии тривиальных фактов линейной алгебры. Вывод следствия 2 из следствия 1 (а следовательно, и из гладко-выпуклого принципа) см. в первой части, а также в книгах АТФ и ГТ.

Принцип Лагранжа для ляпуновских задач и линейных задач оптимального управления

Пусть Δ — промежуток числовой прямой (конечный или бесконечный), U — некоторое топологическое пространство, $f_i\colon \Delta \times U \to \mathbb{R}$, $0 \leqslant i \leqslant m$ — непрерывные функции, X — линейное пространство, $g_i\colon X \to \mathbb{R}$, $0 \leqslant i \leqslant m$ — выпуклые функции A — выпуклое множество $\mathcal{U}$ — совокупность измеримых отображений из Δ в U*. Мы будем изучать здесь ляпуновские задачи вида:

$$\mathcal{F}_0(u(\cdot)) + g_0(x) = \int_{\Delta} f_0\big(t, u(t)\big)\, dt + g_0(x) \to \min;$$

$$\mathcal{F}_i(u(\cdot)) + g_i(x) = \int_{\Delta} f_i\big(t, u(t)\big)\, dt + g_i(x) \leqslant 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant m. \qquad (P_3)$$

Для того, чтобы можно было бы воспользоваться гладко-выпуклым принципом Лагранжа достаточно показать, что отображение

$$\big(u(\cdot), x\big) \to \mathcal{F}_0\big(u(\cdot) + g_0(x)\big), \ldots, \mathcal{F}_m\big(u(\cdot) + g_m(x)\big) \quad \big(u(\cdot) \in \mathcal{U}, \quad x \in A\big)$$

является выпуклым множеством в $\mathbb{R}^{m+1}$. А для этого достаточно доказать выпуклость только лишь интегральной части этого отображения. Вот именно здесь подтвердится один из наших основных тезисов, о котором

* Об измеримости отображений из Δ в U см. в АТФ, пп. 4.2.6 и 4.3.3.

говорилось во введении: *интегрирование порождает выпуклость.* Этот тезис опирается на следующий результат.

Теорема (Ляпунова). *Если* $p\colon \Delta \to \mathbb{R}^n$, $p(\cdot) = (p_1(\cdot), \dots, p_n(\cdot))$ *интегрируемая вектор-функция, то множество* $M = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \int_E p(t)\,dt,\ E \in \Sigma\right\}$, *где* Σ — *совокупность подмножеств* Δ *измеримых по Лебегу, является выпуклым компактом.*

Доказательство этой теоремы см. в АТФ, п. 4.3.2. Докажем теперь нужную выпуклость. Пусть $\xi^i = (\xi^i_0, \dots, \xi^i_m)$ и $\mathcal{F}_k(u^i(\cdot)) = \xi^i_k$, $i = 0, 1$, $0 \leqslant k \leqslant m$. Положив $p_k(t) = f_k(t, u^0(t)) - f_k(t, u^1(t))$, $t \in \Delta$, $0 \leqslant k \leqslant m$, найдем по теореме Ляпунова множество A_α такое, что $\int_{A_\alpha} p_k(t)\,dt = \alpha(\xi^0_k - \xi^1_k)$. И остается сделать «микс» $u_\alpha(\cdot)$ двух управлений, положив $u_\alpha(t)$ равным $u^0(t)$, если $t \in A_\alpha$ и $u^1(t)$ в остальных случаях, и мы получаем, что $\mathcal{F}(u_\alpha(\cdot)) = \alpha\xi^0 + (1-\alpha)\xi^1$, что и требовалось. Применив гладко-выпуклый принцип, получаем

Следствие 3 (принцип Лагранжа для задачи Ляпунова). *Если* $\hat{w} = (\hat{u}(\cdot), \hat{x})$ — *решение задачи* (P_3), *то найдутся множители Лагранжа* $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ *и число* $\lambda_0 \geqslant 0$ *не равные одновременно нулю и такие, что выполнены условия неотрицательности, дополняющей нежесткости и принцип минимума:*

$$\min_{x \in A} \sum_{i=0}^m \lambda_i g_i(x) = \sum_{i=0}^m \lambda_i g_i(\hat{x}),$$

$$\min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \int_\Delta \sum_{i=0}^m \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(t, u(t))\,dt = \int_\Delta \sum_{i=0}^m \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(t, \hat{u}(t))\,dt.$$

К задаче (P_3) редуцируется задача оптимального управления линейная по фазовым координатам. Сформулируем эту задачу. Пусть $\Delta = [t_0, t_1]$ — фиксированный отрезок числовой прямой, $a_i(\cdot) \in L_1(\Delta, \mathbb{R}^n)$, $0 \leqslant i \leqslant n$ и $A(\cdot)\colon \Delta \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ — интегрируемая матричная функция U — топологическое пространство, $f_i\colon \Delta \times U \to \mathbb{R}$ $0 \leqslant i \leqslant m$ и $F\colon \Delta \times U \to \mathbb{R}^n$ — непрерывные функции и отображение γ_{0i}, γ_{1i}, $0 \leqslant i \leqslant m$ — элементы $\mathbb{R}^n$, c_i, $1 \leqslant m$ — числа. Рассмотрим задачу

$$J_0(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_\Delta \langle a_0(t), x(t)\rangle + f_0(t, u(t))\,dt + \langle \gamma_{00}, x(t_0)\rangle + \langle \gamma_{10}, x(t_1)\rangle \to \min;$$

$$\dot{x} = A(t)x + F(t, u(t)), \quad u(t) \in U,$$

$$J_i(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_\Delta \langle a_i(t), x(t)\rangle + f_i(t, u(t))\,dt + \\ + \langle \gamma_{0i}, x(t_0)\rangle + \langle \gamma_{1i}, x(t_1)\rangle \leqslant c_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant m. \qquad (P_4)$$

Ее и называют *задачей оптимального управления линейной по фазовым координатам.* Пусть $p_i(\cdot)$ — решение сопряженной системы $\dot{p}_i = -A^*(t)p + a_i(t)$ с краевым условием $p_i(t_1) = -\gamma_{1i}$, $0 \leqslant i \leqslant m$. Если положить $G_i(t, u) = f_i(t, u) - F^*(t, u)p_i(t)$, $\beta_i = \gamma_{0i} - p_i(t_0)$, то, как нетрудно понять, задача (P_3) редуцируется к задаче

$$J_0(u(\cdot), \xi) = \int_\Delta G_0(t, u(t))\,dt + \langle \beta_0, \xi\rangle \to \min;$$

$$J_i(u(\cdot), \xi) = \int_\Delta G_i(t, u(t))\,dt + \langle \beta_i, \xi\rangle \leqslant c_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant m. \qquad (P_4')$$

Из следствия 3 вытекает

Следствие 4 (принцип Лагранжа для линейных задач). *Если пара* $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ — *решение задачи* (P_4), *найдутся множители Лагранжа* $\{\lambda_i\}_{i=0}^m$, *не равные одновременно нулю, неотрицательные, удовлетворяющие условию дополняющей нежесткости и принципу минимума* $\min_{u \in U} \sum_{i=0}^m \lambda_i G_i(t, u) = \sum_{i=0}^m \lambda_i G_i(t, \hat{u}(t))$ *почти всюду.*

Принцип Лагранжа для задач оптимального управления

Принцип Лагранжа для задач оптимального управления в понтрягинской форме также выводится из гладко-выпуклого принципа, но мы не будем этого делать, ограничившись лишь формулировкой самого результата.

Следствие 5 (Принцип Лагранжа в оптимальном управлении). *Пусть в задаче оптимального управления в понтрягинской форме,* $t_i = \hat{t}_i$, $i = 0, 1$ — *фиксированы, функции* l_i *непрерывно дифференцируемы, а функции* L_i *и отображение* φ *непрерывны и непрерывно дифференцируемы по* x. *Тогда, если* $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ *доставляет сильный минимум в задаче, то выполнен принцип Лагранжа, т. е. существуют множители Лагранжа*

$$(p(\cdot), \lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_0) \in C^1([\hat{t}_0, \hat{t}_1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^{m+1}$$

не равные одновременно нулю и такие, что выполнено необходимое условие в задаче Больца по x

$$\mathcal{L} = \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} L(t, x(t), \dot{x}(t), u(t))\,dt + l(x(\hat{t}_0), x(\hat{t}_1)) \to \min;$$

$$L=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i L_i,\quad l=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i l_i \Rightarrow -\frac{d}{dt}\widehat{L}_{\dot x}(t)+\widehat{L}_x(t)=0,$$

принцип минимума по u

$$\min_{u\in U} L\big(t,\hat x(t),\dot{\hat x}(t),u\big)=\widehat{L}(t)$$

и условия трансверсальности: $\widehat{L}_{\dot x}(\hat t_i)=(-1)^i \hat l_{x(t_i)}$, $i=0,1$. *Если концы свободны, надо к этом соотношениям добавить равенства нулю производных функции Лагранжа по* t_i.

В § 1 гл. 4 было приведено элементарное доказательство принципа максимума.

Замечание. Применимость принципа Лагранжа к задачам оптимального управления также может быть основано на возможности микса управлений с использованием параметрической теории об обратном отображении.

<u>*Подведем итог:*</u> все необходимые условия экстремума во всех рассмотренных случаях соответствуют принципу Лагранжа.

§ 2. Возмущения экстремальных задач

Следует сравнивать динамически возможные движения, варьируя крайние положения системы.

Гамильтон

Одной из центральных идей теории экстремума является мысль, выраженная Гамильтоном: *следует рассматривать не одну задачу, а семейство задач, включающую данную.* Краткому обсуждению этой идеи посвящен данный параграф*.

2.1. Возмущения в математическом программировании

Задачу $f(x)\to\min$; $x\in C$ можно записать, как задачу без ограничений

$$f(x)\to\min; \tag{$\mathcal{P}$}$$

* Концепция возмущения экстремальных задач тесно связана с достаточными условиями экстремума, динамическим программированием, теорией Гамильтона—Якоби и симплектической геометрией. Всему этому кругу вопросов предполагается посвятить отдельную публикацию. О достаточных условиях рассказано в первой части книги.

если положить $f(x)=+\infty$ при $x\notin C$. Если Y — некоторое семейство параметров, $F: X\times Y\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ и для некоторого y_0 имеет место равенство $F(x,y_0)=f(x)$, говорят, что семейство задач

$$F(x,y)\to\min \tag{$\mathcal{P}_y$}$$

является *возмущением* задачи $(\mathcal{P})$.

Теория задач линейного программирования строится на концепции возмущения, и суть этой теории может быть выражена очень кратко: *эпиграф значения возмущенной задачи линейного программирования — выпуклый полиэдр*, откуда вытекает разрешимость задачи (если ее значение конечно), совпадение ее значения со значением двойственной задачи, разрешимость двойственной задачи и невырожденность принципа Лагранжа для прямой и двойственной задач (ср. с гл. 2).

В некоторых классах задач, которые рассматривались во введении, напрашиваются *стандартные* возмущения. Таковыми являются многие задачи, рассмотренные нами.

Для задачи с ограничением типа равенств $f_0(x)\to\min$; $F(x)=0$, $F\colon X\to Y$ стандартное возмущение таково: $f_0(x)\to\min$; $F(x)=y$; для простейшей задачи $J\big(x(\cdot)\big)=\int_{t_0}^{t_1} L\big(t,x(t)\dot x(t)\big)\,dt\to\min$; $x(t_0)=x_0$, $x(t_1)=x_1$ рассматривается такое возмущение

$$J\big(x(\cdot)\big)=\int_{t_0}^{t_1} L\big(t,x(t)\dot x(t)\big)\,dt\to\min;\quad x(t_0)=x_0,\quad x(\tau)=\xi \text{ и т. п.}$$

(о котором как раз и говорит Гамильтон — см. эпиграф).

Невырожденность необходимого условия первого порядка порождает «устойчивость» решения первоначальной задачи: при возмущении этой задачи решения возмущенной задачи плавно эволюционируют в зависимости от параметра возмущения и при этом зачастую удается вычислить субдифференциал S-функции в точке y_0, в которой возмущенная задача совпадает с исходной.

Эта мысль может быть реализована по отношению ко всем типам рассмотренных нами экстремальных задач, но мы проиллюстрируем ее лишь в самых простых случаях — гладкой конечномерной задачи с ограничениями типа равенств и для простейшей задачи классического вариационного исчисления.

Пусть U — окрестность в $\mathbb{R}^n$, $f\colon U\to\mathbb{R}$, $F\colon U\to\mathbb{R}^m$. Рассмотрим конечномерную задачу с равенствами:

$$f(x)\to\min;\quad F(x)=0 \tag{2}$$

и ее стандартное возмущение:

$$f(x) \to \min; \quad F(x) = y. \qquad (P_y)$$

Теорема (о поле в конечномерных задачах с равенствами). *Пусть* f, $F \in C^2(U)$ *(условие гладкости)*, $\hat{x} \in U$, $F(\hat{x}) = 0$, $\operatorname{Im} F'(\hat{x}) = \mathbb{R}^m$ *(условие регулярности), существует множитель Лагранжа* $\widehat{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ *такой, что для функции Лагранжа задачи (2) с единичным множителем Лагранжа при функционале* $\left(\mathcal{L}(x, \lambda, 1)\right) = f(x) + \langle \lambda, F(x) \rangle$ *выполняются:*

a) *необходимое условие минимума первого порядка:*

$$0 = \widehat{\mathcal{L}}_x = f'(\hat{x}) + \langle \lambda, F'(\hat{x}) \rangle \quad (\widehat{\mathcal{L}}_x = \mathcal{L}_x(\hat{x}, \widehat{\lambda})); \qquad (1)$$

b) *условие второго порядка:*

$$\widehat{\mathcal{L}}_{xx} > 0 \quad \forall h \in \operatorname{Ker} F'(\widehat{x}), \quad h \neq 0 \quad (\widehat{\mathcal{L}}_{xx} = \mathcal{L}_{xx}(\widehat{x}, \widehat{\lambda})) \qquad (2)$$

a) *и* b) — *достаточное условие минимума второго порядка). Тогда существуют окрестность* V *точки* $0 \in \mathbb{R}^m$, *окрестность* $U' \subset U$ *точки* $\hat{x}$ *и функция* $\varphi : V \to U \times \mathbb{R}^m$, $\varphi \in C^1(V)$, $\varphi(y) = (x(y), \lambda(y))$, $\varphi(0) = (\hat{x}, \widehat{\lambda})$ *такие, что*

$$\mathcal{L}_x(x, \lambda) = 0, \quad F(x) = y, \quad x \in U', \quad y \in V$$

тогда и только тогда, когда $x = x(y)$, $\lambda = \lambda(y)$. *При этом* $x(y)$ — *локальный минимум* (P_y) *и* $S'(0) = \widehat{\lambda}$.

Доказательство этой теоремы см. в книге [ГТ, с. 140 и далее]. Такие же результаты можно доказать и для других разбиравшихся нами классов экстремальных задач. Одним из важных частных случаев приложения этой общей идеи о полном элиминировании ограничений является основная формула Вейерштрасса.

2.2. Простейшая задача классического вариационного исчисления

Начнем с задач, интегрант которых не содержит фазовых переменных. Класс простейших задач классического вариационного исчисления с интегрантами вида $L = L(t, \dot{x})$, $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (не зависящими от x) исследован почти до конца. (На самом деле не так мало замечательных задач редуцируется к задачам этого класса.) Суть дела в том, что эти задачи — ляпуновские:

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, u(t))\, dt \to \min, \qquad \int_{t_0}^{t_1} u(t)\, dt = x_1 - x_0,$$

а ляпуновские задачи, как объяснялось, на самом деле выпуклые. К ним применим принцип двойственности. Если рассмотреть семейство задач, зависящих от параметра y, записав ограничение в виде равенства $\int_{t_0}^{t_1} u(t)\, dt = y$, и значение возмущенной задачи обозначить $S(y)$, то двойственная функция имеет вид:

$$S^*(p) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \qquad S^*(p) = \int_{t_0}^{t_1} L^*(t, p)\, dt.$$

Это — функция конечного числа переменных. Функция S при широких допущениях замкнута, и потому (по теореме Фенхеля—Моро) вычисление значения задачи сводится к конечномерной выпуклой оптимизации: если y принадлежит относительной внутренности $\operatorname{dom} S$, то

$$S(y) = \max\left(\langle p, y \rangle - \int_{t_0}^{t_1} L^*(t, p)\, dt \right).$$

Причем если решение $\hat{p}$ принадлежит внутренности $\operatorname{dom} S^*$, то решение $\hat{x}(\cdot)$ существует и находится из равенства $L(t, \dot{\hat{x}}(t)) + L^*(t, \hat{p}) = \langle \dot{\hat{x}}(t), \hat{p} \rangle$ почти везде. В достаточно общем случае удается описать обобщенное решение, оно включает в себя некоторое число скачков. Подробнее об этом см. [ИТ, § 9.3].

В задачах классического вариационного исчисления и оптимального управления можно реализовать ту идею о полном снятии ограничений, о которой говорилось в п. 2.1. Мы проиллюстрируем ее лишь на простейшей задаче (2). Допустим, что в этой задаче интегрант — достаточно гладкая функция во множестве $U \times \mathbb{R}$, экстремаль $\hat{x}(\cdot)$ — также гладкая функция и при этом удовлетворяются условия невырожденности первого и второго порядка, сходные по сути с условиями теоремы из п. 2.1. Тогда область U удается покрыть полем экстремалей $u(\cdot, \cdot) \colon U \to \mathbb{R}$ и при этом имеет место формула

$$J(x(\cdot)) - J(\hat{x}(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}\big(t, x(t), u(t, x(t)), \dot{x}(t)\big)\, dt,$$

где $\mathcal{E}(t, x, u, \dot{x}) = L(t, x, \dot{x}) - L(t, x, u) - (\dot{x} - u) L_{\dot{x}}(t, x, u)$ (см. п. 1.3 гл. 5 и [ГТ, с. 146]). Подобные формулы существуют для весьма широкого класса задач.

Особенно красиво формула Вейерштрасса выглядит в квадратическом случае, когда при $t_0 = x_0 = x_1 = 0$, $L(t, x, \dot{x}) = A(t)\dot{x}^2 + B(t)x^2$. Пусть

$h(\cdot)$ — решение уравнения Эйлера для простейшей квадратичной задачи, не обращающееся в нуль в полуинтервале $(0, t_1]$. Тогда для любой функции $x(\cdot)$, $x(0) = x(t_1) = 0$ имеет место формула (Вейерштрасса):

$$\int_0^{t_1} \left(A(t)\dot{x}^2(t) + B(t)x^2(t)\right) dt = \int_0^{t_1} A(t) \left(\dot{x}(t) - \frac{\dot{h}(t)}{h(t)}x(t)\right)^2 dt.$$

§ 3. Расширение вариационных задач и существование решений

«Я убежден, что доказательства существования можно будет провести с помощью некоего основного положения, на которое указывает принцип Дирихле и который, вероятно, приблизит нас к вопросу о том, не допускает ли всякая регулярная вариационная задача решение, если в случае необходимости самому понятию решения придать расширенное толкование».

Д. Гильберт

Этот параграф в значительной мере посвящен осознанию того, что было высказано Гильбертом в приведенном выше эпиграфе. «Основное положение», о котором он говорит, это, по-видимому, принцип Вейерштрасса—Лебега. Регулярная задача (классического вариационного исчисления) — это задача, где интегрант является строго выпуклым по производным. Регулярность гарантирует полунепрерывность снизу. Процедура, называемая *«скользящим режимом»* позволяет утверждать, что с теоретической точки зрения, интегрант (одномерной) вариационной задачи всегда можно считать выпуклым по производным (такие интегранты называются квазирегулярными). Квазирегулярность влечет за собой полунепрерывность снизу функционалов классического вариационного исчисления. И остается вопрос о компактности. Обо всем этом речь идет в этом параграфе.

3.1. Расширение вариационных задач

Примеры несуществования решений

Рассмотрим простейшую задачу классического вариационного исчисления

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to \min; \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1,$$

и постараемся сначала понять, какие причины могут препятствовать существованию решения этой задачи (в естественном и — с определенной

точки зрения наиболее широком — пространстве $W_1^1([t_0, t_1])$ абсолютно непрерывных функций).

Пример 1 (Больца).

$$J_1(x(\cdot)) = \int_0^1 ((\dot{x}^2 - 1)^2 + x^2)dt \to \min; \quad x(0) = x(1) = 0.$$

Ясно, что $J_1(x(\cdot)) > 0$ на любой абсолютно непрерывной функции $x(\cdot)$. Если же взять последовательность функций равномерно стремящуюся к нулю, у которой производная по модулю равна почти всюду единице, то значение интеграла будет стремиться к (недостижимому) нулю. (Например, можно взять последовательность $x_n(t) = \int_0^t u_n(\tau)\,d\tau$, $u_n(t) = \operatorname{sgn}\sin 2\pi nt$, $n \in \mathbf{N}$ и убедиться, что $J_1(x_n(\cdot)) \to 0$ при $n \to \infty$. Такие процедуры называют «скользящими режимами».)

Причиной несуществования решения здесь является неквазирегулярность интегранта, т. е. невыпуклость по $\dot{x}$ функции $\dot{x} \to (\dot{x}^2 - 1)^2 + x^2$. Здесь возможно обобщить понятие решения и тогда в этом примере будет существовать обобщенное решение. (См. далее комментарий к теореме Боголюбова.)

Пример 2 (Вейерштрасса).

$$J_2(x(\cdot)) = \int_0^1 t^2\dot{x}^2 dt \to \min; \quad x(0) = 0, \ x(1) = 1.$$

Это — знаменитый пример, с помощью которого Вейерштрасс оспаривал утверждение, приписываемое Риману, о существовании решения задачи Дирихле в области n-мерного пространства. (Якобы Риман утверждал, что у положительного функционала всегда должно быть решение; Риман, безусловно, был уверен в существовании решения задачи Дирихле, но навряд ли считал сказанное доказательным аргументом.) Ясно, что $J_2(x(\cdot)) > 0$ *для любого* $x(\cdot) \in W_1^1(I)$, $x(0) = 0$, $x(1) = 1$, $I = [0, 1]$. Но если рассмотреть последовательность $x_n(t) = \begin{cases} nt, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{n} \\ 1, & t \geqslant \frac{1}{n}, \end{cases}$, $n \in \mathbf{N}$, то получим, что $\lim\limits_{n\to\infty} J_2(x_n(\cdot)) = 0$. Снова мы видим, что решения нет. Причина тому — недостаточный рост интегранта, который препятствует компактному вложению множества функций с ограниченной величиной интеграла J_2 в пространство $W_1^1(I)$. Интересно отметить, что недостаточный рост интегранта имеется лишь в одной точке — нуль!

И здесь возможно расширить понятие решения, дополнив константу, равную единице, скачком, и тогда и в этом примере будет иметься решение, которому (по Гильберту) можно придать «расширенное толкование».

Пример 3 (гармонический осциллятор).

$$J_3(x(\cdot)) = \int_0^T (\dot{x}^2 - x^2)\,dt \to \min; \quad T > \pi, \quad x(0) = x(T) = 0.$$

Если рассмотреть последовательность $x_n(t) = n\sin(\pi\frac{t}{T})$, $n \in \mathbb{N}$, то нетрудно понять, что $J_3(x_n(\cdot)) \underset{n\to\infty}{\to} -\infty$, т. е. решения нет: функционал неограничен снизу. Здесь, разумеется, никакого «обобщенного» решения быть не может, но допустима такая процедура: наложим «принудительное» ограничение $|\dot{x}(t)| \leqslant N$. Тогда решение $x_N(\cdot)$ будет существовать, и вычислив $J_3(x_N(\cdot))$, можно будет убедиться, что эти числа стремятся к минус бесконечности. Эта же идея может быть применена и в примере Вейерштрасса, и мы пришли бы к описанному выше обобщенному решению. Так что метод принудительного ограничения позволяет, вообще говоря, исследовать задачи, где нет ограниченности снизу интегранта или компактности.

Теорема Боголюбова

Общий принцип, о котором говорит Гильберт, это, вероятно, принцип компактности. Чтобы его применить нужны полунепрерывность снизу и компактность, которая возникает, если функционал коэрцитивен (т. е. имеется рост интеграла $J(x(\cdot))$ при стремлении $x(\cdot)$ к бесконечности). Полунепрерывность снизу гарантируется квазирегулярностью, а коэрцитивность — ростом интегранта.

Оказывается, что неквазирегулярность интегранта может быть теоретически преодолена. Именно, можно расширить задачу, изменив функционал (сделав интегрант квазирегулярным) так, что минимизируемые последовательности у него и у исходного функционала будут одни и те же. Поясним, как это сделать на примере простейшей задачи классического вариационного исчисления:

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\,dt \to \min; \quad x(t_i) = x_i, \quad i = 0, 1. \qquad (P)$$

Обозначим $\widetilde{L}(t, x, \cdot)$ — овыпукление L по $\dot{x}$ при фиксированных (t, x) (или, иначе говоря, вторую сопряженную функцию $\dot{x} \mapsto L^{**}(t, x, \dot{x})$ по последнему аргументу.)

Теорема (Боголюбова о квазирегулярном расширении). *Пусть интегрант $(t, x, \dot{x}) \mapsto L$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ — непрерывен по всем переменным и удовлетворяет неравенству: $L(t, x, \dot{x}) \geqslant \beta$, Тогда для любой абсолютно непрерывной функции $x(\cdot)$ существует последовательность $\{x_n(\cdot)\}$ равномерно сходящаяся к $\hat{x}(\cdot)$ и такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} J(x_n(\cdot)) \to \widetilde{J}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \widetilde{L}(t, x(t), \dot{x}(t))\,dt$.*

Идея доказательства теоремы Боголюбова проста. Устроив разбиение отрезка $[t_0, t_1]$ на N отрезков $\{\Delta_i\}_{i=1}^N$, заменим $J(x(\cdot))$ на сумму $\sum_{i=1}^N L(t_i, x_i, \dot{x}_i)\Delta_i$. Если при этом число $L(\tau_i, x_i, \frac{x_{i+1}-x_i}{\Delta_i})$ попадает на «невыпуклость» функции $\dot{x} \mapsto L(\tau_i, x_i, \dot{x})$, то $L(\tau_i, x_i, \frac{x_{i+1}-x_i}{\Delta_i})\Delta_i$ заменяется на скользящий режим.

Применим теорему Боголюбова к рассмотренному выше примеру 1. При овыпуклении интегранта этого примера получается интегрант $\widetilde{L}(x, \dot{x})$, совпадающий с интегрантом примера при $|\dot{x}| \geqslant 1$ и равный нулю, если $|\dot{x}| \leqslant 1$. При таком интегранте решение существует при любых граничных условиях.

3.2. Теоремы существования в задачах вариационного исчисления

Общая теорема существования

Пусть X — рефлексивное* нормированное пространство, Y — нормированное пространство, $A \subset X$ — выпуклое замкнутое подмножество, Λ: $X \to Y$ — линейный ограниченный оператор, J — функционал на A ограниченный снизу и полунепрерывный снизу относительно слабой сходимости в X. (Если J — выпуклый, то достаточно требовать полунепрерывности снизу в X). Рассмотрим экстремальную задачу:

$$J(x) \to \min; \quad \Lambda x + y_0 = 0, \; x \in A, \qquad (P_1)$$

где y_0 — заданный элемент.

Обозначим через $\mathcal{D}$ — множество допустимых элементов, т. е. таких элементов $x \in A$, для которых $\Lambda x + y_0 = 0$ и $J(x) > -\infty$. Решение задачи, т. е. глобальный минимум обозначим $\hat{x}$.

Теорема 1 (общая теорема существования). *Пусть множество допустимых элементов непусто и функционал J коэрцитивен (т. е. для некоторого $R > 0$ множество $\{x \in \mathcal{D} \mid J(x) \leqslant R\}$ ограничено в X.) Тогда задача (P) имеет решение. Если J — строго выпуклый функционал, это решение единственно.*

Доказательство. Из условия теоремы следует, что для некоторого $\bar{x} \in \mathcal{D}$ множество $\{x \in \mathcal{D} \mid J(x) \leqslant J(\bar{x})\}$ есть замкнутое (в слабой топологии) ограниченное множество рефлексивного пространства X. Как известно, это множество слабо компактно, значит, по принципу Вейерштрасса—Лебега решение задачи (P) существует. ∎

* Банахово пространство X называется рефлексивным, если $X^{**} = X$. В таких пространствах из ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Теорема Тонелли

Применим этот общий подход к простейшей задаче классического вариационного исчисления и убедимся, что если исключить те три причины несуществования, которые были вскрыты при обсуждении приведенных выше трех примеров, то существование решения можно гарантировать. Первый результат такого рода был доказан Тонелли для задачи (P).

Теорема 2 (Тонелли о существовании решения в простейшей задаче). *Пусть интегрант $(t,x,\dot x)\mapsto L\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ в задаче (P) — непрерывная по всем переменным и выпуклая по $\dot x$ при фиксированных t и x функция, удовлетворяющая неравенству: $L(t,x,\dot x)\geqslant \alpha|\dot x|^p+\beta$, $\alpha>0$, $\beta\in\mathbb{R}$, $p>1$. Тогда существует решение задачи (P), принадлежащее пространству абсолютно-непрерывных функций.*

Доказательство. Будем доказывать теорему, предположив, что (помимо непрерывности и выпуклости) интегрант L непрерывно дифференцируем по $\dot x$. Из неравенства, приведенного в формулировке теоремы, получаем, что $\|\dot x(\cdot)\|_{L_p([t_0,t_1])}\leqslant C$, если рассматривать функции, удовлетворяющие граничным условиям со значением функционала, не превосходящим $J(\bar x(\cdot))$, где $\bar x(\cdot)$ — некоторая допустимая функция. Это множество слабо компактно в $L_p([t_0,t_1])$. Рассмотрим минимизирующую последовательность $\{x_n(\cdot)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Из $\dot x_n(\cdot)$ можно выбрать подпоследовательность слабо сходящуюся к $\dot{\hat x}(\cdot)$. Тогда соответствующая подпоследовательность $x_{n_k}(t)=x_0+\int\limits_{t_0}^{t}\dot x_{n_k}(\tau)\,d\tau$ сходится к $\hat x(t)$ и притом равномерно. Легко доказывается, что $\hat x(\cdot)\in AC([t_0,t_1])$. А теперь интегрируя неравенство

$$L(t,x_n(t),\dot x_n(t))-L(t,x_n(t),\dot{\hat x}(t))\geqslant$$
$$\geqslant(\dot x_n(t)-\dot{\hat x}(t))\big(\widehat L_{\dot x}(t)+L_{\dot x}(t,x_n(t),\dot{\hat x}(t))-\widehat L_{\dot x}(t)\big),$$

получаем неравенство: $\lim J(x_{n_k}(\cdot))\geqslant J(\hat x(\cdot))$. ■

При отсутствии роста можно иногда эффективно расширить понятие решения, скажем, дополнив его скачками (как в примере Вейерштрасса; впоследствии мы еще поговорим об этом). В принципе, можно перейти во «второе сопряженное пространство», т. е. достигнуть существования в слишком широком пространстве, где его затруднительно описать явно. Но есть еще одна возможность, о которой уже упоминалось. Ее мы сейчас обсудим более подробно.

Принудительные ограничения и пример Лаврентьева

Оптимальное управление представляет новые возможности для подхода к проблемам существования. Имеет место такой результат: *если интегрант простейшей задачи непрерывен и квазирегулярен и рассматривается задача при дополнительном ограничении на производную $|\dot x|\leqslant N$, то при условии, что существует допустимая кривая, существует и решение задачи.*

Доказательство этой теоремы содержится в книге [ГТ, с. 157] (оно очень близко по сути дела доказательству теоремы Тонелли).

Трудно сказать, в какой мере универсален подход, связанный с принудительным ограничением, ибо существует замечательный (правда, очень вырожденный) пример Лаврентьева. Вот одна из реализаций лаврентьевского примера.

Пример (Лаврентьева).

$$J_4(x(\cdot))=\int\limits_I (t-x^2)^2\dot x^6\,dt\to\min;\quad x(0)=0,x(1)=1.$$

Функция $t\mapsto\hat x(t)=\sqrt{t}$ допустима, она абсолютно непрерывна (т. е. принадлежит $W_1^1(I)$) и в этом пространстве достигает глобального минимума. Но в пространстве функций, удовлетворяющих условию Липшица $(W_\infty^1(I))$, минимум функционала положителен. Доказательство опирается на следующую лемму.

Лемма. *Пусть* $0<\alpha<\beta<1$ *и*

$$W=\Big\{x(\cdot)\in W_\infty^1([\alpha,\beta])\colon\ \frac{t^{1/2}}{4}\leqslant x(t)\leqslant\frac{t^{1/2}}{2}\quad\forall t\in[\alpha,\beta],$$
$$x(\alpha)=\frac{\alpha^{1/2}}{4},\quad x(\beta)=\frac{\beta^{1/2}}{2}\Big\}.$$

Тогда

$$I(x(\cdot))=\int\limits_\alpha^\beta (t-x^2(t))^2\dot x^6(t)\,dt>c_0>0.$$

Действительно, в силу того, что $\frac{x^2(t)}{t}\leqslant\frac14(i)$, получаем:

$$I(x(\cdot),\alpha,\beta)\colon=\int\limits_\alpha^\beta (t-x^2(t))^2\dot x^6(t)\,dt=$$
$$=\int\limits_\alpha^\beta t^2\Big(1-\frac{x^2(t)}{t}\Big)^2\dot x^6(t)\,dt\overset{(i)}{\geqslant}\frac{9}{16}\int\limits_\alpha^\beta t^2\dot x^6(t)\,dt.\qquad (ii)$$

Задача $\int\limits_{\alpha}^{\beta} t^2\dot{x}^6(t)\,dt \to \min;\ x(\alpha) = \frac{\alpha^{1/2}}{4},\ x(\beta) = \frac{\beta^{1/2}}{2}$ легко решается, и ответ в ней

$$(3/5)^5(1/2)^6\frac{(1-1/2(\alpha/\beta)^{1/2})^6}{(1-(\alpha/\beta)^{3/5})^5} > \frac{3^5}{5^5 2^{12}}.$$

Лемма доказана.

Остальное просто. Если $x(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица, тогда, если t меньше некоторого δ_1, то $x(t) < \frac{t^{1/2}}{4}$, $0 < t < \delta_1$, а если $1-\delta_2 < t \leqslant 1$ (при некотором δ_2), тогда $x(t) > \frac{t^{1/2}}{2}$. Значит, существуют такие α и β, как в лемме, и тогда $J_4(x(\cdot)) \geqslant I(x(\cdot),\alpha,\beta) > c_0$, что и требовалось.

Метод принудительного ограничения здесь к цели не приводит. Не исключено, что ситуация примера Лаврентьева имеет место в некоем «общем положении». Но может ли она встретиться в реально интересных задачах? И что делать, если ответ окажется утвердительным? На эти вопросы пока нет отчетливого ответа.

Проблемы существования решения задачи особенно остро стоят в многомерных задачах вариационного исчисления, ибо там почти нет «явных решений», и необходимо гарантировать себе возможность получить приближенное решение, применив какой-либо метод финитизации.

§ 4. Алгоритмы оптимизации

Таким образом, дело сводится к решению легкой задачи: даны две точки A и C и проходящая между ними горизонтальная прямая DE; требуется найти на этой прямой точку B, чтобы путь ABC был наискорейшим.

Лейбниц
(*Из письма И. Бернулли* 31 *июля* 1696 *г. по поводу брахистохроны*)

Алгоритмы решения экстремальных задач делятся на прямые (т. е. методы, не использующие необходимых условий экстремума) и «непрямые». В словах Лейбница, взятых нами в качестве эпиграфа, содержится первый намек на прямой метод в вариационном исчислении: задачу о брахистохроне Лейбниц решает, заменив кривую ломаной, исследуя конечномерную задачу и переходя к пределу.

Прямые алгоритмы основываются, в основном, на идеях *целесообразного спуска*, а также *методах отсечения и штрафа*. Расскажем о некоторых из них.

4.1. Алгоритмы минимизации квадратичной функции

Задача

$$K(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle - c \to \min;\quad x \in \mathbb{R}^d,\quad A > 0, \qquad (P_1)$$

где A — положительно определенная матрица размера $d \times d$, безусловно принадлежит к числу простейших и актуальнейших проблем минимизации. Она коэрцитивна и конечномерна, и потому решение задачи $\hat{x}$ существует. По теореме Ферма должно удовлетворяться уравнение $K'(\hat{x}) = 0 \Leftrightarrow A\hat{x} = b$, и дело сводится, таким образом, к решению линейной системы. Это — задача линейной алгебры. Ей посвящена огромная литература, не относящаяся к оптимизации. Одним из основных методов решения является *метод Гаусса* последовательного исключения неизвестных. Он прост по вычислительной схеме и устойчив по отношению к ошибкам округления. Этот метод требует $\frac{n^3}{3}$ умножений (несмотря на значительные усилия последних лет существенное сокращение этого числа не удается).

Многие методы минимизации функции $K(\cdot)$ реализуют идею целесообразного спуска. Таков, в частности, *метод сопряженных градиентов* (или *сопряженных направлений*; направления y и y' называются *сопряженными* относительно симметрической матрицы A, если Ay ортогонально y').

Метод состоит в следующем. Берется произвольная точка x_0 и из нее спускаются в нижнюю точку функции $K(\cdot)$ вдоль луча l_1, исходящего из x_0 в направлении «минус градиента» $y_0 = -K'(x_0)$. Находится точка x_1, где функция $K(\cdot)$ достигает минимума на этом луче. Далее рассматривается двумерное аффинное многообразие A_0, проходящее через точку x_1, с приложенными к ней векторами y_0 и $K'(x_1)$. Линия уровня ограничения функции $K(\cdot)$ на это многообразие есть эллипс, касающийся луча l_1. Затем находится (сопряженное) направление y_1, ведущее в центр эллипса. Вдоль этого направления снова ищется минимум квадратичной функции, в результате чего мы попадаем в центр эллипса x_2. Тогда берется аффинное многообразие A_2, проходящее через x_2, с приложенными к ней векторами y_1 и $K'(x_2)$ и все повторяется. Через не более, чем d шагов достигается искомый минимум.

4.2. Метод центрированных сечений и метод эллипсоидов

Рассмотрим следующую проблему: *найти минимум выпуклой дифференцируемой функции f на выпуклом конечномерном компактном теле $A \subset \mathbb{R}^d$*:

$$f(x) \to \min;\quad x \in A. \qquad (P_2)$$

Это — общая проблема выпуклой конечномерной оптимизации.

Метод центрированных сечений

В середине шестидесятых годов А. Левин из России и Д. Ньюман из США предложили метод поиска минимума в задаче (P_3), базирующийся на теореме Грюнбаума—Хаммера, относящейся к выпуклой геометрии. Согласно этой теореме, если через центр тяжести некоторого выпуклого тела A в d-мерном пространстве провести гиперплоскость, то она разобьет тело на два множества A' и A и при этом объем любого из этих подмножеств не превосходит величины $\left(1-\frac{1}{e}\right)$ объема множества A.

Сам метод (называемый *методом центрированных сечений*) состоит в следующем. Обозначим A через A_0. Найдем точку $x_0 = grA_0$ — центр тяжести A_0. Вычислим $f'(x_0)$. Если этот вектор — нулевой, задача решена: минимум уже найден, а если этот вектор отличен от нуля, можно отбросить часть A_0, лежащую в полупространстве $\Pi_0' := \{x \mid \langle f'(x_0), x - x_1\rangle > 0\}$ (ибо, как мы помним, для любой выпуклой функции выполнено неравенство $f(x) - f(\xi) \geqslant \langle f'(\xi), x-\xi\rangle$, и, значит, если $x \in A_0 \cap \Pi_0'$, то $f(x) > f(x_1) \geqslant \min f$.) Оставшуюся после отбрасывания $A \cap \Pi_0'$ часть обозначим A_1 и повторим всю процедуру снова. И так далее.

На n-том шаге выберем такую точку ξ_n среди $\{x_1, \dots, x_n\}$, в которой значение f не больше, чем любое из значений $\{f(x_i)\colon 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Докажем, что $f(\xi_n)$ сходится к $f_{\min}$ со скоростью геометрической прогрессии. Действительно, не ограничив себя в общности, можно считать, что $0 \in A$ и это — точка минимума в задаче (P_2). Пусть $\alpha > \left(\frac{\mathrm{Vol}_d A_n}{\mathrm{Vol}_d A}\right)^{1/d} \geqslant \frac{\alpha}{2}$. ($\mathrm{Vol}_d C$ — объем d-мерного множества C). Тогда по определению $\mathrm{Vol}_d(\alpha A) > \mathrm{Vol}_d A_n$, т. е. найдется элемент $\bar x \in \alpha A \setminus A_n$. Из конструкции алгоритма следует, что раз элемент $\bar x$ был отброшен, значит, $f(\bar x) > f(x_s)$ для некоторого s, а значит, $f(\bar x) > f(\xi_n)$. Но $\bar x \in \alpha A$, следовательно, $\bar x = \alpha\xi$, $\xi \in A$ и значит по теореме Грюнбаума—Хаммера, (через $\mathrm{Var} f$ обозначена максимальная разность $f(x) - f(0)$, $x \in A$):

$$\begin{aligned} f(\xi_n) < f(\bar x) &= f\big(\alpha\xi + 0(1-\alpha)\big) \leqslant \alpha f(\xi) + (1-\alpha) f(0) = \\ &= f(0) + \alpha\big(f(\xi) - f(0)\big)\big) \leqslant f(0) + \alpha \mathrm{Var} f \overset{\mathrm{def}\,\alpha}{\leqslant} \\ &\leqslant f(0) + \left(\frac{\mathrm{Vol}_d A_n}{\mathrm{Vol}_d A_0}\right)^{1/d} \mathrm{Var} f \leqslant f(0) + (1 - e^{-1})^{n/d} \mathrm{Var} f. \end{aligned}$$

Метод описанных эллипсоидов Немировского—Юдина—Шора

Метод описанных эллипсоидов основан на комбинации двух идей — идее отсечения, о которой говорилось ранее, и на таком геометрическом факте: *половину эллипсоида можно поместить в эллипсоид объема меньшего, чем изначальный эллипсоид!* При этом, во-первых, отношение объема эллипсоида, содержащего полуэллипсоид к объему самого эллипсоида

меньше единицы, и центр нового эллипсоида можно вычислить по полуэллипсоиду с затратой порядка d^2 операций. Построим описанный эллипсоид.

В силу аффинности задачи можно считать, что изначальный эллипсоид — это шар $\sum\limits_{k=1}^{d} x_k^2 \leqslant 1$, а полушар состоит из точек этого шара с неотрицательной последней координатой. Поместим центр описанного эллипсоида в точку ξ с координатами $(0, \dots, 0, 1/(d+1))$ и определим эллипсоид неравенством

$$\sum_{k=1}^{d-1} \frac{x_k^2(d^2-1)}{d^2} + \frac{\big(x_d - 1/(d+1)\big)^2 (d+1)^2}{d^2} \leqslant 1.$$

Объем построенного эллипсоида равен произведению полуосей на объем единичного шара, и делить потом надо на объем единичного шара, так что интересующая нас величина равна

$$g(d) = \left(\frac{d}{\sqrt{d^2-1}}\right)\frac{d}{d+1} = \frac{d^d}{(d-1)^{d-1}(d+1)^{d+1}}.$$

Без труда доказывается, что $g(d) < 1$ для любого натурального $d \geqslant 2$.

А теперь можно описать и сам алгоритм. Обозначим через E_0 некоторый эллипсоид, содержащий в себе множество A. Если его центр c_0 не принадлежит A, проведем через c_0 гиперплоскость, не содержащую точек из A и отбросим половину эллипсоида, не пересекающуюся с A. Если же $c_0 \in A$, вычислим $f'(c_0)$, произведем отсечение «по Левину—Ньюмену» и снова мы получим половину эллипсоида, которую обозначим E_0'. А теперь опишем вокруг E_0' эллипсоид меньшего объема, чем объем E_0', обозначим новый эллипсоид E_1 и начнем все сначала. Это также приводит к стремлению по функционалу со скоростью геометрической прогрессии.

К числу наиболее известных алгоритмов выпуклой оптимизации относится симплекс-метод.

Симплекс-метод, изложенный в гл. II, сыграл исключительную роль в истории численных методов оптимизации. Многие убеждены в том, что именно на решение задач симлекс-методом было затрачено наибольшее машинное время в сравнении с другими методами оптимизации. В течение многих десятилетий было неизвестно, принадлежат или нет задачи линейного программирования к числу так называемых неполиномиальных (т. е. «трудных») задач. В 1970 году Кли и Минти построили примеры, показывающие, что симплекс-метод в некоторых ситуациях требует экспоненциального числа шагов. Многие математики (в том числе и сам Данциг) не раз говорили, что воспринимают, как чудо пятидесятилетнюю триумфальную «службу» симплекс-метода в бесчисленных исследованиях прикладного характера (Данциг сказал: «The tremendous power of the simplex method is a constant surprise to me»).

И лишь недавно были построены полиномиальные алгоритмы, сопоставимые с симлекс-методом по эффективности. Важный шаг был сделан Хачияном, который применил к решению задач линейного программирования метод эллипсоидов. Но метод Хачияна на практике уступал симплекс-методу. Однако вскоре появились новые методы, которые во многих случаях оказались предпочтительнее симплекс-метода. Один из таких методов, получивших широкое распространение, стал метод, изобретенный индийским математиком Кармаркаром. Но потом выяснилось, что за много лет до работы Кармаркара ту же основную идею построения алгоритма, основанного на методе штрафа, выдвинул российский математик Дикин. Нет возможности здесь описать алгоритм Кармаркара—Дикина (обо всех затронутых проблемах выпуклой оптимизации см. Шор [1989]).

Алгоритмы решения задач классического вариационного исчисления и оптимального управления

Одними из важнейших при решении задач вариационного исчисления являются методы, редуцирующие задачу к конечномерной. Впервые такой метод применил, как было уже сказано, Лейбниц, заменивший искомую кривую ломаной. Затем эту же идею разрабатывал Эйлер (метод ломаных Эйлера).

Метод Бубнова—Галеркина

Необходимость решения задач вариационного исчисления, связанных с инженерными проблемами, стала особенно актуальной в начале века. Среди конкретных алгоритмов, реализующих идею редукции бесконечномерной задачи к конечномерной, выделяется метод Ритца (1908), развитый Галеркиным (1915).

Поясним суть методов Ритца и Галеркина на примере простейшей (вообще говоря — многомерной) задачи. Пусть требуется найти минимум функционала $\int\limits_{\Omega} L\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)\, dt$, при условии, что на границе области Ω функция $x(\cdot)$ принимает заданные значения. Для нахождения функции близкой к минимальной, Ритц предложил рассматривать семейство функций, зависящих от нескольких параметров $\Phi(\cdot, a)$, $a = (a_1, \ldots, a_N)$ такое, что при всех значениях параметра a граничные условия удовлетворяются. Галеркин, конкретизируя эту идею, для решения уравнения Эйлера рассматриваемой задачи, предлагал выбирать некоторое линейное пространство функций.

Приведем пример применения метода Галеркина нахождения минимума квадратичной задачи классического вариационного уравнения, приводящее к приближенному решению уравнения Штурма—Лиувилля.

Рассмотрим задачу:

$$J(x(\cdot)) = \int\limits_0^T \big(\dot{x}^2(t) - q(t)x^2(t)\big)\, dt + 2f(t)x(t)\, dt \to \min;$$

$$x(0) = x(T) = 0 \quad (q > 0).$$

Уравнение Эйлера в этой задаче — одно из самых популярных в математике и ее приложениях — уравнение Штурма—Лиувилля:

$$\ddot{x} + qx = f, \quad x(0) = x(T) = 0.$$

Метод Галеркина (который конкретизировал идею Бубнова) состоит в том, что задавшись системой $\{\xi_k(\cdot)\}_{k=1}^n$, $\xi_k(\cdot) \in C^1([0,t])$ линейно-независимых функций, удовлетворяющих нулевым условиям на концах, ищем решение, минимизирующее функцию многих переменных: $\varphi(x) = J\Big(\sum\limits_{k=1}^n x_k\xi_k(\cdot)\Big)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Подставляя выражение $x_n(\cdot) = \sum\limits_{k=1}^n x_k\xi_k(\cdot)$ в минимизируемый интеграл, получаем:

$$J(x_n(\cdot)) = \sum_{k,l=1}^n a_{kl}x_kx_l + 2\sum_{k=1}^n b_kx_k,$$

где $a_{kl} = a_{lk} = \int\limits_0^T \big(\dot{\xi}_k(t)\dot{\xi}_l(t) - q(t)\xi_k(t)\xi_l(t)\big)\, dt$, $b_k = \int\limits_0^T f(t)\xi_k(t)\, dt$. Задача свелась к конечномерной квадратичной задаче, которая обсуждалась выше.

Упражнение. Вычислить по методу Галеркина приближенное решение рассматриваемой задачи при $T = q(t) = f(t) = 1$, $x_2(t) = t(1-t)(a_1 + a_2t)$.

§ 5. Приложения общей теории к решению конкретных задач

> Математики прошлого столетия со страстным рвением отдавались решению отдельных трудных задач. Я напомню только поставленную Иоганном Бернулли задачу о брахистохроне.
>
> *Гильберт*

> Следует поставить перед собой цель изыскать способ решения всех задач... одним и притом простым способом.
>
> *Даламбер*

О роли отдельных задач в истории нашей науки замечательно сказал Гильберт в словах, приведенных нами выше (и при этом в качестве примера он привел задачу на экстремум!). Существует огромное число точно решенных экстремальных задач — в классическом анализе, геометрии, алгебре... С точно решенными задачами на экстремум связаны имена многих крупнейших математиков всех времен.

В этом параграфе приводится свыше сорока задач, поставленных и решенных в разные времена, начиная с классической изопериметрической задачи, обсуждавшейся в IV веке до нашей эры (решение ее было предложено Зенодором) и кончая некоторыми задачами, ставшими актуальными в самые последние годы. Решения этих задач связаны с именами Архимеда, Евклида, Ферма, Кеплера, Ньютона, Лейбница, братьев Бернулли, Лагранжа, Эйлера, Чебышева, Бернштейна, Гильберта, Ландау, Адамара, Юнга, Блашке, Харди, Литтлвуда, Пойа, Надя, Колмогорова, Вейля и многих других.

Нам представляется важным подчеркнуть, что *все эти задачи (как и подавляющее большинство других, которые могут быть решены «явно») допускают решения, полученные по единому методу, обсуждавшемуся в этой части — методу Лагранжа.*

А именно, всюду можно поступать единообразно и «просто» (как, собственно, и рекомендовал поступать Даламбер). Сначала следует формализовать задачу, затем применять принцип Лагранжа, далее решать (или исследовать) получающиеся уравнения. В итоге находятся функции, подозреваемые на экстремум, и наконец (с помощью достаточных условий) следует доказывать, что получено именно решение задачи.

Не все задачи решаются здесь с полной подробностью, во многих случаях мы просто ссылаемся на решения, детально разобранные в книгах [ИТ], [АТФ], [АГТ], [Т], [ГТ] или статье [МИ-Т], (а в ряде случаев — в первой части этой книги).

Этот параграф книги не предназначен для легкого чтения. Почти каждая из предлагаемых задач — это отдельная тема, которая далеко не исчерпывается ее решением. Сами же решения могут служить комментарием к методу Лагранжа, к полезности изучения теории экстремума, к истории математики, и могут быть использованы на лекциях, семинарских занятиях, а также на занятиях различных математических кружков. Но вместе с тем большинство задач были в той или иной мере опробованы на семинарских занятиях или кружках (в частности, задачи 2, 6, 42 и 46 были предложены студентам для решения вместо сдачи экзамена, они справились с заданием, и их решения были использованы в этом параграфе), так что все задачи § 5 интересны и доступны.

Старинные задачи и их обобщения

1. Классическая изопериметрическая задача

Среди плоских кривых заданной длины найти кривую, охватывающую наибольшую площадь.

Это — одна из старіннейших задач на экстремум. Считается, что ответ в этой задаче был известен Аристотелю (IV век до н. э.). Об истории

этой задачи и различных решениях ее, не опирающихся на теорию экстремума, см. в книге [Т] (рассказ второй). Решение обобщенной задачи (так называемой *задачи Чаплыгина*) подробно изложено в книге [АТФ, с. 107–110]. Как известно, начиная с IV в. до нашей эры, в классической изопериметрической задаче известен такой

Ответ: решением задачи является круг.

2. Задача Архимеда

Среди шаровых сегментов в $\mathbb{R}^n$ с заданным объемом (или — в двумерном случае — заданной площадью) боковой поверхности найти сегмент наибольшего объема.

При $n = 3$ эта задача была решена Архимедом (жившим в III в. до н. э.) в его сочинении «О шаре и цилиндре». Элементарное решение задачи Архимеда, основанное на идеях Архимеда см. в книге [Т, с. 31, 34]. Предлагаемое ниже решение n-мерного варианта задачи получено студентом мех-мата МГУ В. Тимориным.

Шаровой сегмент n-мерного шара в $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$ зададим в сферических координатах системой неравенств $\|x\| \leqslant R$, $x_n \geqslant R\sin\theta$, где $\|x\|$ — евклидова длина вектора x, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. Тогда, как известно, объем этого сегмента равен $\sigma_{n-1}R^n I_n(\theta)$, а объем боковой поверхности этого сегмента равен $(n-1)\sigma_{n-1}R^{n-1}I_{n-2}(\theta)$, где $I_n(\theta) = \int\limits_\theta^{\pi/2} \cos^n\varphi\, d\varphi$, σ_n — объем n-мерного единичного шара.

1. *Формализация*: $R^n I_n(\theta) \to \max$; $R^{n-1}I_{n-2}(\theta) = 1$. Это конечномерная гладкая задача. Решение ее существует и принцип Лагранжа применим.
2. *Принцип Лагранжа*: $\mathcal{L}(R, \theta, \lambda, -1) = -R^n I_n(\theta) + \lambda R^{n-1} I_{n-2}(\theta)$.

Условие стационарности приводит к уравнениям:

$$nRI_n(\theta) = \lambda(n-1)I_{n-2}(\theta), \quad R\cos^2\theta = \lambda,$$

откуда приходим к равенству $(n-1)\cos^2\theta I_{n-2}(\theta) = nI_n(\theta)$ (i).

3. *Исследование*. Если воспользоваться известной рекуррентной формулой

$$I_n(\theta) = \frac{-\sin\theta\cos^{n-1}\theta}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}(\theta),$$

получаем: $\sin\theta\cos^{n-1}\theta = (n-1)\sin^2\theta I_{n-2}(\theta)$. Это уравнение допускает очевидное решение $\theta = 0$. Других решений нет. Действительно, любое другое решение удовлетворяло бы равенству $\sin\theta I_{n-2}(\theta) = \frac{\cos^{n-1}\theta}{n-1}$, в то время, как, воспользовавшись монотонностью синуса на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, получаем:

$$I_{n-2}(\theta)\sin\theta = \int\limits_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}\varphi \sin\theta d\varphi < \int\limits_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}\varphi\sin\varphi d\varphi = \frac{\cos^{n-1}\theta}{n-1}.$$

Еще надо проверить граничную точку $\theta = -\frac{\pi}{2}$ и убедиться, что объем шара меньше объема полушара той же боковой поверхности.

В частности, если $n = 3$, то *«из всех сферических сегментов, ограниченных равными поверхностями, наибольшим будет полушарие»* (Архимед. Сочинения. М.: Физматлит, 1962).

3. Задача о брахистохроне и сходные с ней

«В вертикальной плоскости даны две точки A и B. Определить путь AMB, спускаясь по которому под влиянием силы тяжести, тело M, начав двигаться из точки A, дойдет до точки B в кратчайшее время».

Цитируется по статье И. Бернулли «Задача, к решению которой приглашаются математики», Acta Eruditorum, июнь 1696 г. Она обсуждалась § 1 гл. 3. История этой задачи, ее формализация и решение «в духе Лейбница» читатель найдет в книгах [Т] (рассказ седьмой) и [АТФ, с. 113].

Обобщим несколько задачу И. Бернулли, включив ее в однопараметрическое семейство подобных задач.

1. *Формализация:* (в этой задаче и в задаче о наименьшей поверхности вращения мы пользуемся эйлеровскими обозначениями: x вместо t и y вместо x):

$$J_\alpha(y(\cdot)) = \int\limits_{x_1}^{x_2} y^\alpha\sqrt{1+y'^2}\,dx \to \min;$$
$$y(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \quad \alpha < 0, \quad y(x) > 0. \tag{3}$$

Это — простейшие задачи классического вариационного исчисления. Брахистохрона соответствует $\alpha = -\frac{1}{2}$, при $\alpha = -1$ — это задача о геодезических на полуплоскости Пуанкаре и т. п.

2. *Принцип Лагранжа* здесь сводится к уравнению Эйлера. Интегрант в (3) не содержит независимого переменного, следовательно, уравнение Эйлера имеет *интеграл энергии*: $y^{-2\alpha}(1+y'^2) = D^2$

3. *Исследование.* При отрицательных α интегрирование уравнения Эйлера приводит к семейству экстремалей:

$$y = C\sin^\gamma t, \quad x = C_1 + C\gamma\int\limits_0^t \sin^\gamma\tau\,d\tau, \quad \gamma = -\frac{1}{\alpha}.$$

В случае брахистохроны экстремали — циклоиды, в случае полуплоскости Пуанкаре — полуокружности с центром на оси Ox. Экстремали, имеющие общую точку на оси Ox, образуют поле, покрывающее всю открытую верхнюю полуплоскость. Отсюда и из формулы Вейерштрасса вытекает, что *единственная экстремаль, соединяющая граничные точки, является решением задачи.*

Ответ. В случае брахистохроны решение задачи доставляет единственная циклоида, проходящая через граничные точки; в случае полуплоскости Пуанкаре решение задачи — полуокружность с центром на оси Ox, проходящая через граничные точки.

4. Аэродинамическая задача Ньютона

Найти «тело, получающееся вращением [...] кривой около AB, [которое] будет испытывать наименьшее сопротивление в [...] редкой среде среди других тел той же длины и ширины». (Цитируется по книге Ньютона «Математические начала натуральной философии»*.)

1. *Формализация:*

$$\int\limits_0^{T_0} \frac{t\,dt}{1+\dot{x}^2(t)} \to \min; \quad x(0) = 0, \quad x(T_0) = x_1, \quad \dot{x}(t) \geqslant 0. \tag{5}$$

История этой задачи, ее формализация и решение, идейно восходящее к Ньютону, можно прочитать в книге [Т] (рассказ восьмой), а решение, базирующееся на принципе Лагранжа, подробно изложено здесь в § 3 гл. 4 и в книге [АТФ, с. 99–103]. Хотелось бы сказать только, что задача (5) — типичная задача оптимального управления, ее крайне затруднительно исследовать методами классического вариационного исчисления, и это обстоятельство являлось причиной того, что решение задачи Ньютона фактически нигде не приведено в учебниках по вариационному исчислению. Но она была решена Ньютоном, и решение было опубликовано в «Математических началах» в 1687 году!

Так что первая задача оптимального управления была решена раньше рождения вариационного исчисления (годом рождения вариационного исчисления считается год брахистохроны — 1696).

5. Задача Ферма—Торичелли—Штейнера и ее обобщение

Найти в n-мерном пространстве точку, сумма расстояний от которой до вершин некоторого симплекса минимальна.

1. *Формализация:*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n+1} |x - x_i| \to \min. \tag{5}$$

* См.: *Крылов А. Н.* Собрание трудов, т. 7. М.—Л.: Изд. АН СССР, 1936.

Решение $\hat{x}$ задачи (5), очевидно, существует. Это — выпуклая задача без ограничений и потому

2. *Принцип Лагранжа* выражается здесь теоремой Ферма:

$$0 \in \partial f(\hat{x}). \tag{i}$$

3. *Исследование.*

Соотношение (i) (если допустить, что решение — внутренняя точка симплекса) расшифровывается так: *сумма единичных векторов, смотрящих из точки $\hat{x}$ в вершины симплекса, равна нулю.* Отсюда при $n = 2$ сразу следует *углы между векторами, ведущими из решения задачи к вершинам, равны* 120°.

Точка внутри треугольника, из которой каждая сторона видна под углом 120° легко строится циркулем и линейкой и называется *точкой Торичелли.* Если построение невозможно, искомая точка — вершина тупого угла (что также сразу следует из теоремы Ферма). Подробнее задача обсуждается [ИТ, с. 441]. и [АГТ, №4.12].

При $n \geqslant 3$ такого рода построения неизвестны. Но численно решение может быть найдено для очень большого числа неизвестных. Однако, и в многомерном случае можно найти интересные явно решаемые варианты этой задачи. Например, *найти точку в* $\mathbb{R}^n$, *сумма расстояний от которой до начала координат и векторов* $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, 0, \dots, 1)$ *была минимальной.*

6. Задача о минимальной поверхности вращения

Среди кривых в верхней полуплоскости, соединяющих две различные точки, найти такую, которая при вращении вокруг горизонтальной оси порождает поверхность минимальной площади.

Эта задача и различные ее модификации обсуждаются, начиная с XVII века, вплоть до нашего времени. Она связана с именами Лейбница, братьев Бернулли, Лагранжа и многих других. Эта задача присутствует почти во всех учебниках по вариационному исчислению, но редко, где решение доводится до конца. Мы здесь даем некоторые указания, по которым читатель сможет полностью исследовать эту задачу.

1. *Формализация.* Рассмотрим частный случай общей задачи — с симметричными краевыми условиями:

$$\int_{-x_0}^{x_0} y\sqrt{1 + y'^2}\, dx \to \min; \quad y(-x_0) = y(x_0) \neq 0, \quad y(x) \geqslant 0. \tag{6}$$

Это — простейшая задача классического вариационного исчисления.

2. *Принцип Лагранжа* приводит к уравнению Эйлера. Ввиду того, что интегрант не зависит от независимого переменного, уравнение Эйлера

допускает *интеграл энергии:*

$$\frac{dy}{\sqrt{D^2y^2 - 1}} = dx \quad \overset{Dy=\operatorname{ch} t}{\Longrightarrow} \quad y(x) = D^{-1}\operatorname{ch}(Dx + D_1).$$

Мы видим, что эти экстремали — *цепные линии.*

3. *Исследование.*

Все экстремали, соединяющие симметричные точки (тогда $D_1 = 0$), получаются из экстремали $y = \operatorname{ch} x$ гомотетией. Поэтому в совокупности они заполняют только угол, а не всю полуплоскость. Параметры этого угла находятся из решения уравнения $x = \coth x$, откуда получается, что $\operatorname{tg}\varphi_0 = 1.50088\dots$.

Внутри угла экстремали покрывают его двукратно: существуют две экстремали, соединяющие точки $(-x_0, y_0)$ и (x_0, y_0). При этом одна из экстремалей идет ниже другой и касается прямой $y = \operatorname{tg}\varphi_0 x$, т. е. эта прямая является огибающей семейства нижних экстремалей. Из общей теории следует тогда, что на нижней экстремали не удовлетворяется условие Якоби. А верхняя экстремаль доставляет сильный (локальный) минимум (все достаточные условия сильного минимума удовлетворяются).

Помимо экстремалей, расположенных внутри угла, существуют «ломаные»экстремали, состоящие из вертикальных отрезков и отрезка $|x| \leqslant x_0, y = 0$. Это можно получить методом принудительного ограничения, когда в дополнение к условиям задачи добавляется ограничение $|y'| \leqslant N$ и N устремляется к ∞.

Таким образом, граничные точки $(\pm x_0, y)$ можно соединить либо одной «ломаной» экстремалью, либо двумя — «ломаной» и верхней цепной линией. Если сравнить значения на этих двух экстремалях, то оказывается, что они совпадают на прямой, угловой коэффициент, $\operatorname{tg}\widehat{\varphi}$ которой равен $1.89502\dots$.

Отсюда (с помощью формулы Вейерштрасса) получаем такой

Ответ: если $\frac{y_0}{x_0} > \operatorname{tg}\widehat{\varphi}$, *решением является верхняя цепная линия, если же* $\frac{y_0}{x_0} \leqslant \operatorname{tg}\widehat{\varphi}$, *то «ломаная экстремаль».*

(Некоторые дополнительные подробности см. в [ИТ, с. 427–430].)

7. Задачи Кеплера

Вписать в единичный шар a) цилиндр, b) конус, c) пирамиду, d) прямоугольный параллелепипед максимального объема.

Занимательная история постановки задач Кеплера и их решение см. в книге [Т] (рассказ шестой).

Это — более простые задачи в сравнении с предыдущими. Ограничимся лишь формализацией задачи о цилиндре.

1. *Формализация:*

$$f_0(x) = x\sqrt{1 - x^2} \to \min; \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{7}$$

Это фактически гладкая задача без ограничений. Читатель самостоятельно может обдумать и n-мерные варианты всех этих задач.

8. Задача Герона и ее обобщение

Даны две точки A и B по одну сторону от прямой l. Требуется найти на l такую точку D, чтобы сумма расстояний от A до D и от D до B была наименьшей.

1. *Формализация*:

$$f_0(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d-x)^2}, \tag{8}$$

где координаты точек таковы: $A = (0, a)$, $B = (b, d)$. Это — простейшая одномерная задача без ограничений. Ее решение совершенно элементарно (см. [Т]).

Читатель может самостоятельно поставить и решить аналогичные задачи, скажем, заменив прямую на плоскости окружностью, плоскость — сферой (с поиском кратчайших путей с заходом на окружность большого круга), или плоскостью Лобачевского и т. п.

9. Задача Снеллиуса—Ферма о законе преломления света на границе двух сред

Согласно принципу Ферма в геометрической оптике *«в неоднородной среде свет избирает такую траекторию, вдоль которой время, затрачиваемое им на преодоление пути от одной точки до другой, минимально.»* Таким образом, для установления закона Снеллиуса преломления света на прямолинейной границе двух однородных сред сводится к решению задачи

$$f_0(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{v_2}, \tag{9}$$

С решением этой задачи, помимо Снеллиуса и Ферма, связаны имена Декарта и Лейбница — см. об этом в книге [Т] (рассказ третий).

10. Задача Аполлония

Сколько нормалей можно провести из точки на плоскости к эллипсу? Иначе говоря, требуется определить число стационарных точек в задаче

$$(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 \to \min; \quad \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 = 1. \tag{10}$$

Решение этой задачи приведено в § 3 гл. 1. Об истории этой задачи см. в книге [Т, с. 130].

Избранные задачи геометрии

В геометрии было решено множество замечательных экстремальных задач. В книге [Т] приведено несколько задач элементарной геометрии. Здесь приводятся пять задач, связанных с именами Грамма, Адамара, Юнга и Бляшке и еще одна задача понадобившаяся для построения алгоритма выпуклой оптимизации.

11. Задача о кратчайшем расстоянии от точки до подпространства в гильбертовом пространстве

Найти расстояние в гильбертовом пространстве от точки x^0 до линейной оболочки векторов $\{x_1, \ldots, x^n\}$.

1. *Формализация*:

$$\|x^0 - \sum_{k=1}^{n} \xi_k x^k\|^2 \to \min. \tag{11}$$

Это — гладкая выпуклая (даже квадратичная) задача без ограничений. Решение ее см. в [АГТ, с. 221]. Ответ выражается через определитель Грамма.

12. Неравенство Адамара

Пусть $X = (x_i^j)_{i,j=1}^n$ произвольная квадратная матрица порядка n. Имеет место неравенство: $(\det X)^2 \leqslant \Pi_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n (x_i^j)^2\right)$.

1. *Формализация*:

$$D(x^1, \ldots, x^n) = \det X \to \min; \quad \|x^j\| = 1, \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{12}$$

Это — гладкая задача математического программирования. Применение принципа Лагранжа приводит к цели (см. [ИТ, с. 444]).

13. Неравенство Юнга

Для выпуклого компакта $A \subset \mathbb{R}^n$ доказать неравенство $D(A) \geqslant \sqrt{2(n+1)/n}\, R(A)$, где $D(A)$ — диаметр, а $R(A)$ — радиус A.

Проблема Юнга редуцируется к задаче на симплексах после решения следующей задачи (о чебышевском центре).

1. *Формализация*:

$$\max_{y \in A} \|x - y\| \to \min. \tag{13}$$

Это — выпуклая задача без ограничений, к которой применима теорема об очистке, и это редуцирует задачу к симплициальной. Симплициальную задачу тоже нетрудно решить методом Лагранжа, но проще — непосредственное решение (см. [ИТ, с. 431–434]).

14. Неравенство Бляшке

Для выпуклого компакта $A \subset \mathbb{R}^n$ доказать неравенство $r(A) \geqslant \beta_n h(A)$, где $r(A)$ — наибольший радиус вписанного шара, $h(A)$ — ширина A,а

$$\beta_n = \begin{cases} \frac{(n+2)^{1/2}}{n+1}, & n = 2k, \quad k \in \mathbb{N}, \\ n^{-1/2}, & n = 2k-1, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Задача Бляшке редуцируется к задаче Юнга переходом к полярам.

15. Задача о центре тяжести

Доказать, что через любую точку, лежащую внутри n-мерного тела, можно провести гиперплоскость так, чтоб эта точка оказалась центром тяжести сечения.

1. *Формализация.* Пусть заданная точка тела A — начало координат и $V(\omega)$, $\omega \in \mathbb{S}^n$ — объем пересечения тела A с полупространством, ограниченным гиперплоскостью, перпендикулярной ω, проходящей через начало координат. Следует рассмотреть задачу

$$V(\omega) \to \min; \quad \omega \in \mathbb{S}^n. \tag{15}$$

Анализ ее приводит к решению задачи (см. [АГТ, с. 229–230]).

Задачи технического содержания

16. Задача Годдарда

Как следует управлять ракетой, чтобы она в фиксированный момент времени достигла заданной точки с заданной скоростью, израсходовав минимум топлива.

1. *Формализация*:

$$\int_{t_0}^{t_1} |u|\,dt \to \min; \quad \ddot{x} = u + g, \quad x(t_i) = x_i, \quad \dot{x}(t_i) = v_i, \quad i = 0, 1. \tag{16}$$

(Формализация задачи проведена в [ГТ].) Задача (16) — линейная по фазовым переменным. К ней применим метод двойственности. Подробности в книге [ГТ, с. 160–162].

17. Задача о мягкой посадке

Космический аппарат движется по прямолинейной траектории, перпендикулярной поверхности небесного тела. Требуется мягко посадить аппарат, затронув минимум топлива.

1. *Формализация*:

$$m_0 - m(T) \to \max; \quad \ddot{x} = \frac{ku}{m} - \gamma, \quad \dot{m} = -u,$$
$$x(0) = \xi_1 > 0, \quad \dot{x}(0) = \xi_2, \quad m(0) = m_0,$$

$$x_1(T) = \dot{x}(T) = 0, \quad 0 \leqslant u \leqslant U. \tag{17}$$

(По поводу формализации см. [ГТ].) Задача (17) относится к оптимальному управлению. Ее решение методом Лагранжа см. в [ГТ, с. 157–160].

18. Задача о стрельбе

1. *Формализация*:

$$\int_0^{x_1} \sqrt{y+h}\sqrt{1+y'^2}\,dx \to \min; \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1 > -h.$$

Это — задача классического вариационного исчисления. Подробности ее решения см. в учебнике [А].

19. Задача об оптимальном возбуждении осциллятора

Найти оптимальный закон возбуждения жесткости осциллятора, при котором его энергия достигнет заданной величины за минимальное время.

1. *Формализация*:

$$T \to \min; \quad \ddot{x} + (1 - \varepsilon u)x = 0, \quad x(0) = x_0,$$
$$\dot{x}(0) = y_0, \quad x(T)^2 + \dot{x}(T)^2 = 1, \quad 0 \leqslant u \leqslant 1, \quad 0 < \varepsilon < 1. \tag{19}$$

Формализация задачи и ее подробное исследование см. в [ИТ, с. 435–439].

20. Задача быстродействия со смешанным критерием

1. *Формализация*:

$$\int_0^{T_0} \left(1 + \varepsilon f(\ddot{x})\right) dt \to \min;$$
$$|\ddot{x}| \leqslant 1, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0, \quad x(T) = \dot{x}(T) = 0, \quad \varepsilon > 0, \tag{20}$$

f — четная функция.

Решение простейшей задачи о быстродействии (когда в (20) $\varepsilon = 0$) изложено в первой части (§ 3 гл.4). В общем случае решение см. в [АГТ, с. 281].

Классические неравенства

Точные неравенства всегда связаны с решением задач на экстремум, и потому они — замечательный полигон для общей теории.

21. Доказать неравенство Коши: $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leqslant \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_k^2\right)$.

1. *Формализация*:

$$\sum_{i=1}^{n} x_k y_k \to \min; \quad \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1. \tag{21}$$

Это — гладкая задача математического программирования.

Существование имеет место из-за принципа компактности. Применение принципа Лагранжа немедленно приводит к цели.

В задачах 22–25 дело обстоит аналогично, и мы ограничиваемся лишь формализацией.

22. Доказать неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим: $(\Pi_{k=1}^{n} x_k)^{1/n} \leqslant n^{-1} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k, \quad x_k \geqslant 0.$

1. *Формализация*:

$$\Pi_{i=1}^{n} x_i \to \max; \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad x_i \geqslant 0. \tag{22}$$

(Решение этой задачи см. в [ИТ, с. 445, 446]).

23. Доказать обобщенное неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим: $\Pi_{k=1}^{n} x_k^{\alpha_k} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$, $\alpha_k > 0$, $\sum \alpha_k = 1$, $x_k \geqslant 0$.

1. *Формализация*:

$$\Pi_{k=1}^{n} x_k^{\alpha_k} \to \max; \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 1, \quad x_k \geqslant 0. \tag{23}$$

24. Доказать неравенство для степенных $S_r(x) := \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^r\right)^{1/r}$, $r \in \mathbb{R}$: **при** $0 < p \leqslant q \leqslant \infty$, $S_q(x) \leqslant S_p(x)$.

1. *Формализация*:

$$S_r(x) \to \max; \quad S_p(x) = 1. \tag{24}$$

25. Доказать неравенство для средних степенных $\sigma_r(x) := \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^r/n\right)^{1/r}$, $r \in \mathbb{R}$: **при** $0 < p \leqslant q \leqslant \infty$, $\sigma_p(x) \leqslant \sigma_q(x)$.

1. *Формализация*:

$$\sigma_r(x) \to \max; \quad \sigma_p(x) = 1. \tag{25}$$

Решение задачи см. в [АГТ], задача 2.67.

26. Доказать неравенства Гельдера и Минковского:

а) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_k y_k \leqslant \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_k^{p'}\right)^{1/p'}$, $x_k, y_k \leqslant 0$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

б) $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} (x_k + y_k)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_k^p\right)^{1/p}$.

27. Доказать обобщенное неравенство Гельдера:

если X — нормированное пространство, $Y = X^*$ — сопряженное пространство и $p(\cdot)$ — непрерывная сублинейная функция, то $\langle x, y\rangle \leqslant p(x)\mu\partial p(y) \quad \forall x \in X, \quad y \in Y$. ($\mu A$ — функция Минковского множества A, ∂p — субдифференциал p). Решение см. [МИ-Т, с. 101].

28. Доказать неравенство Гильберта: $\int\limits_{\mathbb{R}_+} \frac{x^2}{t^2}\, dt \leqslant 4 \int\limits_{\mathbb{R}_+} \dot{x}^2\, dt.$

1. *Формализация*:

$$\int_{\mathbb{R}_+} \left(|\dot{x}|^2 - \frac{1}{4}\left|\frac{x}{t}\right|^2\right) dt \to \min; \quad x(0) = 0. \tag{28}$$

Решение см. в [АГТ, с. 278]. В следующей задаче рассмотрено обобщение этого неравенства.

29. Доказать обобщенное неравенство Харди:

$\int\limits_{\mathbb{R}_+} \frac{x^p}{t^p}\, dt \leqslant \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int\limits_{\mathbb{R}_+} \dot{x}^p\, dt.$

1. *Формализация*:

$$\int_{\mathbb{R}_+} \left(|\dot{x}|^p - \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \left|\frac{x}{t}\right|^p\right) dt \to \min; \quad x(0) = 0. \tag{29}$$

2. *Принцип Лагранжа* приводит к уравнению Эйлера $\frac{d}{dt}(|\dot{x}|^{p-1}\operatorname{sgn}\dot{x}) + \left(\frac{p-1}{pt}\right)^p |x|^{p-1}\operatorname{sgn} x = 0$.

3. *Исследование*. Ищем решение в виде $\varphi(t) = t^a$, и получаем, что $a = \frac{p-1}{p}$. Основная формула Вейерштрасса приводит тогда к тождеству (опять-таки, доказываемому непосредственным интегрированием по частям)

$$\int_{\mathbb{R}_+} \left(|\dot{x}|^p - \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \left|\frac{x}{t}\right|^p\right) dt = \int_{\mathbb{R}_+} \mathcal{E}\left(t, x(t), \frac{\varphi'(t)x}{\varphi(t)}, \dot{x}(t)\right) dt \geqslant 0,$$

где $\mathcal{E}$ — функция Вейерштрасса, подробнее см. [АГТ, с. 279].

30. Доказать неравенство Вейля (принцип неопределенности):

$$\left(\int_T x^2 dt\right)^2 \leqslant K(T)\int_T t^2x^2 dt \int_T \dot{x}^2 dt, \quad T=\mathbb{R},\ \mathbb{R}_+,\ K(\mathbb{R})=4,\ K(\mathbb{R})=2.$$

1. *Формализация*:

$$\int_{\mathbb{R}_+} \dot{x}^2(t)\,dt \to \min; \quad \int_{\mathbb{R}_+} (t^2-1)x^2(t)\,dt = 1. \tag{30}$$

2. *Принцип Лагранжа*, примененный к данной изопериметрической задаче, приводит к уравнению Эйлера $\ddot{x} + \lambda(1-t^2)x = 0$ и условию трансверсальности $\dot{x}(0) = 0$.
3. *Исследование.* Уравнение Эйлера допускает решение $\varphi(t) = B\times \exp(-At^2)$, $A > 0$, которое принадлежит рассматриваемому классу и удовлетворяет условию трансверсальности, что позволяет, базируясь на основной формуле Вейерштрасса, выписать следующее тождество:

$$\int_{\mathbb{R}_+} (\dot{x}^2(t) + (t^2-1)x^2(t))\,dt = \int_{\mathbb{R}_+}\left(\dot{x} - \frac{\dot{\varphi}(t)}{\varphi(t)}\right)^2 dt = \int_{\mathbb{R}_+}(\dot{x}+tx)^2\,dt \geqslant 0. \quad (i)$$

Справедливость этого неравенства мгновенно получается интегрированием по частям. Подставив теперь вместо $x(t)$ выражение $y\left(\frac{t}{a}\right)$, приходим к неравенству

$$\int_{\mathbb{R}_+} \dot{y}^2(\tau)\,d\tau - a^2\int_{\mathbb{R}_+} y^2(\tau)\,d\tau + a^4\int_{\mathbb{R}_+}\tau^2y^2(\tau)\,d\tau \geqslant 0 \quad \forall a,$$

и применив условие неотрицательности квадратного трехчлена, приходим к нужному неравенству.

Экстремальные свойства полиномов

31. Доказать критерий Чебышева об альтернансе:

для того, чтобы алгебраический полином степени n был полиномом наименьшего уклонения (в равномерной метрике) для функции непрерывной на конечном отрезке, необходимо и достаточно, чтобы разность функции и полинома принимала, чередуя знаки, свои минимальные и максимальные значения (одинаковые по модулю) в $n+2$ точках.

Доказательство. Существование решения $\hat{x}(\cdot)$ следует из принципа компактности.

1. *Формализация.* Положим $F(t,x(\cdot)) = |y(t) - x(t)|$, $t \in [a,b]$, $x(\cdot) \in \mathcal{P}_n$. Задача формализуется так:

$$f(x(\cdot)) := \max_{t\in[a,b]} F(t,x(\cdot)) \to \min, \tag{i}$$

(i) — выпуклая конечномерная задача без ограничений. Критерий минимума в ней —
2. *Теорема Ферма*: $0 \in \partial f(\hat{x}(\cdot))$.
3. *Исследование.* Согласно теореме об очистке найдутся $r \leqslant n+2$, точки $a \leqslant \tau_1 < \ldots < \tau_r \leqslant b$, неотрицательные числа α_i в сумме равные единице и векторы $y_i \in \partial F_{x(\cdot)}(\tau_i, \hat{x}(\cdot))$ такие, что

$$F(\tau_i, \hat{x}(\cdot)) = \max_{t\in[a,b]}|y(t) - \hat{x}(t)|, \quad 1 \leqslant i \leqslant r, \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i y_i = 0. \tag{ii}$$

Но функция $x(\cdot) \to F(\tau_i, x(\cdot)) = |y(\tau_i) - x(\tau_i)|$, очевидно, дифференцируема в точке $\hat{x}(\cdot)$ и

$$\begin{gathered}\partial F_{x(\cdot)}(\tau_i, \hat{x}(\cdot)) = F'(\tau_i, \hat{x}(\cdot)),\\ \left\langle F'(\tau_i, \hat{x}(\cdot)), x(\cdot)\right\rangle = -\operatorname{sgn}(y(\tau_i) - \hat{x}(\tau_i))x(\tau_i).\end{gathered} \tag{iii}$$

Из (ii) и (iii) получаем тождество

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i \operatorname{sgn}(y(\tau_i) - \hat{x}(\tau_i))x(\tau_i) = 0 \quad \forall x(\cdot) \in \mathcal{P}_n. \tag{iv}$$

Если допустить, что $r < n+2$, то подставив в (iv) полином $\xi_i(t) = \prod_{j=1, j\neq i}^r (t - \tau_j)$, получим, что $\alpha_i = 0$ для всех i, что противоречит тому, что их сумма равна единице. А при $r = n+2$ подставим в (iv) полином Лагранжа $\zeta_i(\cdot)$, принимающий значение нуль во всех точках τ_j, кроме $j = i$, где он равен единице $(1 \leqslant j \leqslant n+1)$, и получим $\alpha_i \operatorname{sgn}(y(\tau_i) - \hat{x}(\tau_i)) = -\alpha_{n+2}\operatorname{sgn}(y(\tau_{n+2}) - \hat{x}(\tau_{n+2}))\zeta_i(\tau_{n+2})$. Но числа $\zeta_i(\tau_{n+2})$, как легко понять, альтернируют, т. е. альтернируют и $y(\tau_i) - \hat{x}(\tau_i)$. См. также [МИ-Т, с. 96]. ∎

32. Полиномы, наименее уклоняющиеся от нуля в $L_p([-1,1])$, $p = 1, 2, \infty$.

Полином $T_{np}(\cdot) = y_n(\cdot) - \hat{x}(\cdot)$, где $y_n(t) = t^n$, а $\hat{x}(\cdot)$ — решение задачи

$$\|y_n(\cdot) - x(\cdot)\|_{L_p([-1,1])} \to \min; \quad x(\cdot) \in \mathcal{P}_{n-1} \tag{32}$$

называется ***полиномом наименее уклоняющимся от нуля в*** $L_p([-1,1])$. *Доказать следующие формулы*:

(A) $T_{n\infty}(t) = 2^{-(n-1)}\cos n\arccos t$,

(B) $T_{n1}(t) = 2^{-n}\frac{\arcsin(n+1)\arccos t}{\sqrt{1-t^2}}$,

(C) $T_{n2}(t) = \frac{n!}{(2n)!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$ (формула Родрига).

Доказательство. Функция $T_{n\infty}(\cdot)$ — многочлен степени n со старшим коэффиентом единица, имеющий $n+1$-альтернанс. По теореме Чебышева об альтернансе он наименее уклоняется от нуля.

Остались случаи $p = 1$ и 2. Решим их.

1. *Формализация*:

$$f_{np}(x) = \int_{-1}^{1}\left|t^n - \sum_{k=1}^{n} x_k t^{k-1}\right|^p dt \to \min. \qquad (i)$$

Это выпуклые (и гладкие даже при $p = 1$) задачи без ограничений.

2. *Критерий решения — теорема Ферма*:

$$f'_{np}(\hat{x}) = 0. \qquad (ii)$$

3. *Исследование.*

При $p = 1$, дифференцируя $f_{n1}(\cdot)$ и приравнивая производную нулю, получаем, что $\hat{x}(\cdot)$ является решением задачи тогда и только тогда, когда

$$\int_{-1}^{1}\operatorname{sgn}\big(t^n - \hat{x}(t)\big)t^k\,dt = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1. \qquad (ii')$$

Проверим, что $T_{n1}(\cdot)$ с одной стороны — полином степени n со старшим коэффициентом, равным единице, а с другой, что он удовлетворяет соотношению (ii'). Полином $T_{n1}(\cdot)$ равен, очевидно, полиному $(n+1)^{-1}\dot{T}_{n+1\infty}(\cdot)$, откуда вытекает первое утверждение, и кроме того,

$$\int_{-1}^{1}\operatorname{sgn}T_{n1}(t)t^k\,dt \overset{t=\cos\tau}{=} -2^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sgn}\sin(n+1)\tau\cos^k\tau\sin\tau\,d\tau = 0,$$

если $0 \leqslant k \leqslant n-1$, ибо разложение в ряд Фурье функции $\operatorname{sgn}\sin(n+1)\tau$ начинается с $\alpha\sin(n+1)\tau$ в то время, как $\cos^k\tau\sin\tau$ при $0 \leqslant k \leqslant n-1$ — тригонометрический полином степени n. Соотношение (ii') доказано. Значит, $T_{n1}(\cdot)$ — полином наименее уклоняющийся от нуля при $p = 1$.

Аналогично при $p = 2$, дифференцируя функцию $f'_{n2}(\cdot)$ получаем, что $\hat{x}(\cdot)$ является решением задачи при $p = 2$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{-1}^{1}\big(t^n - \hat{x}(t)\big)t^k\,dt = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1. \qquad (ii'')$$

Очевидно, что полином $T_{n2}(\cdot)$, построенный по формуле Родрига, является полиномом степени n со старшим коэффициентом, равным единице. Остается проверить лишь, что этот полином удовлетворяет (ii''). Действительно,

$$\int_{-1}^{1}T_{n2}(t)t^k\,dt = c_n\int_{-1}^{1}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n t^k\,dt = c'_n\int_{-1}^{1}(t^2-1)^n\frac{d^n}{dt^n}t^k\,dt = 0$$

для $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Итак, $T_{n2}(\cdot)$ — полином наименее уклоняющийся от нуля при $p = 2$. ■

33. Решить задачу Чебышева об экстраполяции:

доказать, что среди всех полиномов степени n, по норме в метрике $C([-1,1])$ не превосходящих единицы, наибольшее значение в точке $\tau > 1$ принимает полином Чебышева $T_n(t) = \cos n\arccos t$, а наименьшее — полином $(-1)T_n(\cdot)$.

1. *Формализация (задачи минимизации)*:

$$x(\tau) \to \min; \quad \|x(\cdot)\|_{C([-1,1])} \leqslant 1, \quad x(\cdot) \in \mathcal{P}_n, \qquad (33)$$

Задача (33) относится к числу выпуклых экстремальных задач. Решение $\hat{x}(\cdot)$ в ней существует в силу принципа компактности (ибо множество полиномов, ограниченных по норме $C([-1,1])$ компактно в пространстве $C([-1,1])$).

2. *Принцип Лагранжа.*

Применим к задаче (33) принцип Лагранжа (т. е. теорему Куна—Таккера; при этом условие Слейтера здесь выполнено). Согласно этому принципу, найдется множитель Лагранжа $\lambda > 0$ такой, что соответствующая ему функция $\mathcal{L}(x(\cdot),\lambda,1) = x(\tau) + \lambda\max_{t\in[-1,1]}|x(\cdot)|$ достигает в $\hat{x}(\cdot)$ глобального минимума. Отсюда, из теоремы Ферма и формулы Моро—Рокафеллера вытекает включение:

$$0 \in \partial\mathcal{L}_{x(\cdot)}\big(\hat{x}(\cdot),\lambda,1\big). \qquad (i)$$

Применяя далее теорему об очистке и теорему Каратеодори из конечномерной выпуклой геометрии (согласно которой элемент конической оболочки множества из $\mathbb{R}^m$ представим, как коническая оболочка не более, чем m элементов этого множества), заключаем, что существуют натуральное число $1 \leqslant r \leqslant n+1$, r точек $-1 \leqslant \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_r \leqslant 1$ и чисел $\{\alpha_i > 0\}_{i=1}^r$, $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$ такие, что имеют место следующие соотношения (подробнее см. [МИ-Т, с. 108]):

$$x(\tau) + \lambda\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\operatorname{sgn}\hat{x}(\tau_i)x(\tau_i) = 0 \quad \forall x(\cdot) \in \mathcal{P}_n, \qquad (ii)$$

$$|\hat{x}(\tau_i)| = 1 \quad (i = 1, \ldots, r). \qquad (iii)$$

Соотношение (ii) назовем *основным тождеством.*
3. *Исследование.* Покажем, что $r = n + 1$.

Предположим, что $r \leqslant n$. Тогда подставив в (ii) полином $x_0(t) = \prod_{j=1}^{r}(t - \tau_j)$, приходим к противоречию с (ii) (ибо $x_0(\tau) \neq 0$). Значит, $r = n + 1$ и решение совпадает либо с $T_n(\cdot)$, либо с $-T_n(\cdot)$.

34. Доказать неравенство Бернштейна:

Для любого тригонометрического полинома $x(\cdot)$ степени n имеет место неравенство

$$\|\dot{x}(\cdot)\|_{C([-\pi,\pi])} \leqslant n\|x(\cdot)\|_{C([-\pi,\pi])}.$$

Неравенство точное и достигается на функциях $A\sin(n\cdot+\gamma)$. Ввиду инвариантности задачи относительно сдвига возможна такая
1. *Формализация.*

$$f_0\big(x(\cdot)\big) = \dot{x}(0) \to \min; \quad f_1\big(x(\cdot)\big) = \max_{t\in[-\pi,\pi]} F\big(t, x(\cdot)\big) \leqslant 1,$$
$$F\big(t, x(\cdot)\big) = |x(t)|, \quad x(\cdot) \in \mathcal{T}_n,$$

где $\mathcal{T}_n$ — пространство тригонометрических полиномов степени n.
2. *Принцип Лагранжа* приводит к соотношению

$$0 \in \partial\Big(f_0(\hat{x}(\cdot)) + \lambda f_1(\hat{x}(\cdot))\Big).$$

3. *Исследование.* Здесь мы фактически повторяем рассуждения предыдущего пункта. Применение теоремы об очистке к функции $F\big(t, x(\cdot)\big) = |x(t)|$, $x(\cdot) \in \mathcal{T}_n$ приводит к основному тождеству:

$$\dot{x}(0) + \lambda\sum_{k=1}^{r}\alpha_k \operatorname{sgn}\hat{x}(\tau_k)x(\tau_k) = 0, \quad \forall x(\cdot) \in \mathcal{T}_n, \qquad (i)$$

где $\hat{x}(\cdot)$ — экстремальный полином, $\lambda > 0$, $\alpha_k > 0$, $r \leqslant 2n+2$, $|\hat{x}(\tau_k)| = 1$, $\sum\alpha_k = 1$. Аналогично тому, как это было проделано при исследовании задачи об экстраполяции, показывается, что r должно быть равно $2n$ и значит, экстремальный полином $y(\cdot) =: \hat{x}(\cdot)$ имеет $2n$ различных точек, где он достигает своего максимума и минимума по модулю равных единице. Значит, полиномы $(y')^2$ и $1 - y^2$ степени $2n$ имеют одинаковые нули в числе $4n$, откуда следует, что они пропорциональны. Коэффициент пропорциональности находится из приравнивания старших членов. В итоге приходим к уравнению $y'^2 = n^2(1 - y^2)$, решая которое находим искомый полином: $\hat{x}(t) = -\sin nt$, откуда немедленно следует неравенство Бернштейна. См. также [МИ-Т, с. 109].

Задачи о неравенствах для производных

Под неравенствами для производных традиционно понимают мультипликативные неравенства вида

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)} \leqslant K\|x(\cdot)\|^{\alpha}_{L_p(T)}\|x^{(n)}(\cdot)\|^{\beta}_{L_r(T)} \qquad (1)$$

(где $0 \leqslant k < n$ — целые, $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$, $\alpha, \beta \geqslant 0$, $T = \mathbb{R}$ или $\mathbb{R}_+$), справедливые для всех функций $x(\cdot) \in L_p(T)$, у которых $(n-1)$-ая производная локально абсолютно непрерывна на T и $x^{(n)}(\cdot) \in L_r(T)$. Пространство таких функций будем обозначать через $\mathcal{W}^n_{p,r}(T)$ или просто $\mathcal{W}^n_p(T)$, если $p = r$.

При фиксированном T неравенство (1) зависит от пяти параметров: n, k, p, q и r (величины α и β однозначно ими определяются: $\alpha = \frac{n-k-1/r+1/q}{n-1/r+1/p}$, $\beta = 1 - \alpha$). Точную (т.е. наименьшую возможную) константу в этом неравенстве будем обозначать через $K_T(n, k, p, q, r)$.

Рассматриваемая задача равносильна следующей:

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)} \to \max; \quad \|x(\cdot)\|_{L_p(T)} \leqslant 1, \quad \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(T)} \leqslant 1. \qquad (P_{n,k,p,q,r})$$

Предлагаемые ниже задачи 36–45 представляют собой весьма содержательные упражнения на применение принципа Лагранжа. Все они подробно разобраны в статье [МИ-Т1], а частично — в [МИ-Т].

36. Доказать неравенство Э. Ландау:

$$\|\dot{x}\|_{C^b(\mathbb{R}_+)} \leqslant 2\|x(\cdot)\|^{1/2}_{C^b(\mathbb{R}_+)}\|\ddot{x}(\cdot)\|^{1/2}_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}$$

(с этого неравенства началась вся проблематика). См. [МИ-Т, с. 124].

37. Доказать неравенство Харди—Литтлвуда—Полиа:

$$\|\dot{x}\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \|x(\cdot)\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R})}\|\ddot{x}(\cdot)\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Обобщение этой задачи см. в [МИ-Т1, с. 80].

38. Доказать неравенство Харди—Литтлвуда—Полиа:

$$\|\dot{x}\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leqslant \sqrt{2}\|x(\cdot)\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}_+)}\|\ddot{x}(\cdot)\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}_+)}$$

Решение этой задачи содержится в книге [ХЛП, с. 225–232], решение методом Лагранжа см. в [МИ-Т1, с. 90].

39.

***Решить задачу** $(P_{1,0,2,\infty,2})$ (**Надь, Габушин**).* Решение см. [МИ-Т1, с. 86].

40.

Решить задачу $(P_{1,0,p,\infty,r})$. (*Надь*)

1. *Формализация.*

$$x(0) \to \min; \quad \int_{\mathbf{R}_+} |x(t)|^p\, dt \leqslant 1, \quad \int_{\mathbf{R}_+} |\dot{x}(t)|^r\, dt \leqslant 1. \qquad (i)$$

Это изопериметрическая задача классического вариационного исчисления и задача выпуклого программирования одновременно.

2. *Принцип Лагранжа* приводит к канонической системе

$$\dot{\psi} = \lambda |x|^{p-1} \operatorname{sgn} x, \quad \dot{x} = \mu |\psi|^{r'-1} \operatorname{sgn} \psi. \qquad (ii)$$

3. *Исследование.* Система (ii) имеет интеграл (интеграл энергии) с константой, равной нулю (ибо на бесконечности x и $\dot{x}$ стремятся к нулю):

$$a|\dot{x}|^r + b|x|^p = 0 \Rightarrow \dot{x} = -Ax^{p/r}. \qquad (ii)$$

Интегрируя (ii), получаем три типа решений:

— при $p = r$: $\hat{x}(t, C, \alpha) = C \exp(-\alpha t)$,

— при $p > r$: $\hat{x}(t, C, \alpha) = C(t + \alpha)^{r/(r-p)}$,

— при $p < r$: $\hat{x}(t, C, \alpha) = C(t-\alpha)^{r/(r-p)}$ при $0 \leqslant t \leqslant \alpha$, $\hat{x}(t, C, \alpha) = 0$ при $t \geqslant \alpha$.

Вычисляя параметры из изопериметрических условий $\|x(\cdot)\|_{L_p(\mathbf{R}_+)} = \|\dot{x}(\cdot)\|_{L_r(\mathbf{R}_+)} = 1$, приходим к ответу (ибо в выпуклых задачах невырожденные необходимые условия являются достаточными): $K_T(0, 1, p, \infty, r) = (\frac{p+r'}{p})^{r'/(p+r')}$. См. также [МИ-Т, с. 114, 115].

41.

Решить задачу $(P_{2,k,\infty,\infty,r})$, $k = 0, 1$ (*Арестов*). Решение, см. в [МИ-Т1, с. 101–102], [МИ-Т, с. 124].

42.

Решить задачу $(P_{2,k,2,\infty,\infty})$, $k = 0, 1$ (*Фуллер*).

1. *Формализация* (*для* $k = 0$):

$$\int_{\mathbf{R}_+} |x(t)|^2\, dt \to \min, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = u, \quad |u(t)| \leqslant 1 \quad \text{п. в.} \qquad (i)$$

2. *Принцип Лагранжа.*

Функция Лагранжа задачи (i) имеет вид:

$$\mathcal{L} = \int_{\mathbf{R}_+} \left(\frac{1}{2} x^2(t) + q(t)\big(\dot{x}(t) - y(t)\big) + p(t)\big(\dot{y}(t) - u(t)\big) \right) dt + \mu\big(x(0) - 1\big).$$

Это, с одной стороны, задача выпуклого программирования, а с другой — оптимального управления. Пусть $\hat{x}(\cdot)$ — решение задачи (i). Условие стационарности приводит к следующему тождеству:

$$\int_{\mathbf{R}_+} \big(\hat{x}(t)x(t) + \hat{q}(\dot{x} - y) + \hat{p}\dot{y}\big)\, dt + \mu\big(x(0) - 1\big) = 0,$$

а принцип минимума к равенству $\ddot{\hat{x}}(t) = \operatorname{sgn} \hat{p}(t)$. Интегрируя тождество по частям, приходим к соотношениям

$$\ddot{\hat{p}}(t) = -\hat{x}(t), \quad \hat{p}(0) = 0. \qquad (ii)$$

Из этих соотношений вытекает *интеграл энергии*:

$$\dot{\hat{x}}(t)\dot{\hat{p}}(t) + \frac{\hat{x}^2(t)}{2} = |\hat{p}(t)|. \qquad (ii')$$

Кроме того, мы приходим к следующему *основному тождеству*:

$$-\dot{\hat{p}}(0)x(0) + \int_{\mathbf{R}_+} \big(\hat{x}(t)x(t) + \hat{p}(t)\ddot{x}(t)\big)\, dt \equiv 0. \qquad (iii)$$

В том, что из (ii) следует (iii) тривиально проверяется непосредственно.

3. *Исследование.*

Для решения задачи достаточно построить пару $\big(\hat{x}(\cdot), \hat{p}(\cdot)\big)$, удовлетворяющую (ii). Действительно, если такая пара построена, то тогда из (iii) последует точное неравенство (для $x(0) = 1$, $|\ddot{x}(t)| \leqslant 1$):

$$\left(\int_{\mathbf{R}_+} \hat{x}^2\, dt \right)^{1/2} \geqslant \left(\int_{\mathbf{R}_+} \hat{x}^2\, dt \right)^{-1/2} \int_{\mathbf{R}_+} \hat{x}(t)x(t)\, dt \overset{(iii)}{=}$$

$$\overset{(iii)}{=} \left(\int_{\mathbf{R}_+} \hat{x}^2 dt \right)^{-1/2} \left(\dot{\hat{p}}(0) - \int_{\mathbf{R}_+} \hat{p}(t)\ddot{x}(t)\, dt \right) \geqslant \left(\int_{\mathbf{R}_+} \hat{x}^2\, dt \right)^{1/2},$$

(т. к. согласно (iii) $\left(\dot{\hat{p}}(0) - \int_{\mathbf{R}_+} |\hat{p}(t)|\, dt \right) = \left(\int_{\mathbf{R}_+} \dot{\hat{x}}^2\, dt \right)^{1/2}$).

Для построения пары $\big(\hat{x}(t), \hat{p}(t)\big)$ используем *автомодельность* этой задачи, т. е. инвариантность уравнений (ii) относительно преобразований: $\lambda \mapsto \big(x_\lambda(\cdot), p_\lambda(\cdot)\big)$, $x_\lambda(t) = \lambda^2 x\big(\frac{t}{\lambda}\big)$, $p_\lambda(t) = \lambda^4 p\big(\frac{t}{\lambda}\big)$. Обозначим

$\dot{\hat{x}}(0) = -\alpha$, $\alpha > 0$, тогда из (ii') последует $\dot{\hat{p}}(0) = \frac{1}{2\alpha}$. Получаем, что для малых t наши функции выражаются следующими формулами:

$$\hat{x}(t) = \frac{t^2}{2} - \alpha t + 1, \quad \hat{p}(t) = \frac{t}{2\alpha} - \frac{t^2}{2} + \alpha\frac{t^3}{6} - \frac{t^4}{24}.$$

Пусть $T = T(\alpha)$ — первый положительный нуль функции $\hat{p}(\cdot)$. Из описанной инвариантности и единственности решения (следующей из строгой выпуклости функционала) должно последовать, что

$$\hat{x}(T) = \big(\hat{x}(T)\big)^{-1}\hat{x}\Big(\sqrt{|\hat{x}(T)|}t + T\Big), \quad \hat{p}(T) = -\big(\hat{x}(T)\big)^{-2}\hat{p}\Big(\sqrt{|\hat{x}(T)|}t + T\Big),$$

откуда немедленно вытекает равенство $\frac{\dot{\hat{x}}(T)}{\hat{x}(T)^2} = -\alpha^{-2}$. Таким образом, для определения двух неизвестных α и T имеются два уравнения:

$$-\alpha^2\Big(\frac{T^2}{2} - \alpha T + 1\Big) = (T - \alpha)^2, \qquad (iv)$$

$$f(\alpha) = \frac{T}{2\alpha} - \frac{T^2}{2} + \alpha\frac{T^3}{6} - \frac{T^4}{24} = 0. \qquad (v)$$

Из квадратного по T уравнения (iv) получаем: $T = \alpha\left(1 + \sqrt{\frac{\alpha^2-2}{\alpha^2+2}}\right)$. Таким образом, $\alpha \geqslant \sqrt{2}$, причем $\hat{p}(\sqrt{2}) = \hat{x}(\sqrt{2}) = \dot{\hat{x}}(\sqrt{2}) = 0$. При этом легкий подсчет показывает, что $f'(\sqrt{2}) = -\infty$, и $f(\alpha) \to \infty$ при $\alpha \to \infty$. Отсюда следует, что уравнение $f(\alpha) = 0$ имеет положительный корень $\widehat{\alpha}$. Это и завершает построение пары $\big(\hat{x}(t), \hat{p}(t)\big)$ на отрезке $[0, T(\widehat{\alpha})]$, а значит, из-за автомодельности задачи можно достроить решение на всей полупрямой. Оно оказывается финитным и склеенным из счетного числа парабол. Величина $\widehat{\alpha}$ легко считается приближенно и оказывается равной (с точностью до одной десятитысячной) 1.4997. (Оно находится и «явно»: $\widehat{\alpha}^4 = \frac{3+3\sqrt{33}}{4}$.) Таким образом имеет место

Теорема (решение задачи Фуллера для $p = 2$, $r = 0$). *Имеет место неравенство*

$$\|x(\cdot)\|_{C^b(\mathbb{R}_+)} \leqslant K\|x(\cdot)\|^{4/5}_{L_2(\mathbb{R}_+)}\|\ddot{x}(\cdot)\|^{1/5}_{L_\infty(\mathbb{R}_+)},$$

где $K = K(2, 0, 2, \infty, \infty, \mathbb{R}_+) = \frac{5^{2/5}(3+3\sqrt{33})^{1/10}}{2^{3/5}} = 1.69659\ldots$.
(См. [МИ-Т, с. 117–121].)

43.

Решить задачу

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} (x^2 + \ddot{x}^2)\,dt \to \min; \quad x(0) = 1. \qquad (43)$$

(Решение этой задачи равносильно решению задачи $(P_{2,k,2,\infty,2})$, $k = 0$.)

Ответ: $\hat{x}(t) = e^{-t/\sqrt{2}}\cos\frac{t}{\sqrt{2}}$.

§ 6. Заключительные замечания

Как было сказано вначале, вторая часть была написана на основе полугодового обязательного курса, прочитанного Тихомировым на механико-математическом факультете МГУ.

Несколько слов об «архитектуре» курса и этой части книги. В начале курса речь шла о *базе*, о «предварительных сведениях». Основная же часть курса делилась на пять частей: *необходимые условия, достаточные условия, существование решений, алгоритмы, и решения задач.*

В этой главе книги «базовой» части мы не уделили внимания, ибо в курсе, хотя и несколько по-другому, но по сути дела излагалось содержание § 5 гл. 1.

В курсе была охвачена значительная часть теории, касающейся необходимых условий экстремума, которая строилась на протяжении более, чем трех с половиной веков (с того момента, когда Ферма в 1629 году впервые получил общий прием решения задач на экстремум и кончая фактически нашим временем). Эта часть курса (с некоторым превышением) отражена в § 1 этой главы. Читатель может провести сравнение содержащегося в этом параграфе соответствующим материалом, изложенным в учебниках [А], [Б], [ГФ], [Я].

Тем более важно обозначить те задачи, которые находятся за гранью описанной теории. Мы, в основном, рассматривали задачи вариационного исчисления и оптимального управления *в одномерном случае* (когда переменное t одномерно).

Одной из наиболее важных проблем теории экстремума представляется нам доведение теории *многомерных* задач (где независимое переменное многомерно) вариационного исчисления и оптимального управления до того уровня, которого достигла одномерная теория. (О состоянии многомерной теории можно получить представление по книгам [Mor] и [Kl].) Естественно начинать думать и над вариационным исчислением в бесконечномерном случае — хотя бы на уровне условий первого порядка (скажем, в задачах об оптимальных диффеоморфизмах и т. п.).

Но и в одномерной теории остаются нерешенные проблемы, например, те, которых мы коснулись, когда обсуждали неравенства для производных — проблемы, когда функционалы определены на некомпактных множествах типа прямой или полупрямой. Кроме того, хотелось бы построить теорию, позволяющую алгоритмически действовать и в тех случаях, когда решения нет.

В части достаточных условий в курсе излагался традиционный материал, содержащийся в первой части книги. В § 2 этой главы сделаны начальные попытки взглянуть на проблематику более широко. Размеры книги не позволили сделать это подробнее. Предполагается специальное издание, в котором будут освещены проблемы возмущений экстремальных задач, достаточных условий и симплектической геометрии. Материал §§ 3 и 4 (существование и алгоритмы) примерно соответствует тому, что было прочитано на курсе. Материал § 5 (решение задач) отрабатывался на разного рода математических кружках, семинарах по курсам оптимизации и специальных семинарах.

Список литературы к части II

[А] *Ахиезер Н. И.* Вариационное исчисление. Харьков: Изд. ХГУ, 1981.

[АГТ] *Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М.* Сборник задач по оптимизации. М.: Наука, 1984.

[АТФ] *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.

[Б] *Блисс Г. А.* Лекции по вариационному исчислению. Л.: Иностранная литература, 1950.

[В] *Васильев Ф. П.* Численные матоды теории экстремальных задач. М.: Наука, 1980.

[ГТ] *Галеев Э. М., Тихомиров В. М.* Краткий курс теории экстремальных задач. М.: МГУ, 1989.

[ГФ] *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961.

[ИТ] *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

[МИ-Т] *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ и его приложения. М.: Эдиториал УРСС, 2000. Матем. сборник. Т. 188, № 12, 1997.

[МИ-Т1] *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* О неравенствах для производных колмогоровского типа. Матем. сборник. Т. 188, № 12, 1997.

[Пол] *Поляк Б. Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.

[Пон] *Понтрягин Л. С.* и др. Математическая теория оптимальнвх процессов. М.: Наука, 1976.

[Р] *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

[Т] *Тихомиров В. М.* Рассказы о максимумах и минимумах. М.: Наука, 1986.

[ХЛП] *Харди Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. М.: Иностранная литература. 1948.

[ЭТ] *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.

[Я] *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974.

[Kl] *Klötzler R.* Mehrdimensional Variationsrechnung. Berlin, VEB Deutscher Ferlag, 1971.

[Mor] *Morrey Ch. R.* Vultiple integrals in the calaulus of variations. New York: Springer, 1966.

Список обозначений

absmin (absmax) — абсолютный, т.е. глобальный минимум (максимум) в задаче

locmin (locmax, locextr) — локальный минимум (максимум, экстремум)

$S_{\min}$ ($S_{\max}$), иногда, чтобы подчеркнуть глобальность экстремума S_{absmin} (S_{absmax}), — численное значение абсолютного минимума (максимума) задачи

(P) — нумерация (обозначение) задачи

$\operatorname{Arg} P$ — множество решений задачи (P)

S_P — численное значение задачи (P)

$D(P)$, иногда D_P, — множество допустимых элементов в задаче (P)

$D(\hat{x})$ — множество функций дифференцируемых в точке $\hat{x}$

$D^k(\hat{x})$ — множество функций k раз дифференцируемых в точке $\hat{x}$ $(k > 1)$

$\langle a, b\rangle$ — скалярное произведение векторов a и b

$\operatorname{lin}\{a_1, \dots, a_m\}$ — линейная оболочка векторов $a_1, \dots, a_m$

I — единичная матрица

$\{x \mid A(x)\}$ — множество элементов x, обладающих свойством $A(x)$

X^* — пространство сопряженное с X

$\langle x^*, x\rangle$ — значение линейного функционала x^* на элементе x

$L(X, Y)$ — пространство линейных непрерывных отображений из пространства X в пространство Y

$L^\perp$ — аннулятор множества L

Λ^* — оператор, сопряженный с оператором Λ, $\langle \Lambda^* y^*, x\rangle = \langle y^*, \Lambda x\rangle$

$x(\cdot)$ — обозначение, которым подчеркивается, что $x(\cdot)$ является элементом функционального пространства

$C([t_0, t_1], \Rightarrow)$ — пространство непрерывных на отрезке $[t_0, t_1]$ функций $x(\cdot)\colon \Rightarrow \to \Rightarrow^n$ с нормой $\|x(\cdot)\|_0 = \max_{t\in[t_0,t_1]} |x(t)|$

$C(K, \Rightarrow^n)$ — пространство непрерывных вектор-функций $x(\cdot)\colon K \to \Rightarrow^n$, заданных на компакте K с нормой $\|x(\cdot)\|_0 = \max_{t\in K} |x(t)|$

$C^r(K, \Rightarrow^n)$ — пространство r раз непрерывно дифференцируемых вектор-функций $x(\cdot)\colon K \to \Rightarrow^n$, заданных на компакте K с нормой $\|x(\cdot)\|_r = \max\{\|x(\cdot)\|_0, \|\dot{x}(\cdot)\|_0, \dots, \|x^{(r)}(\cdot)\|_0\}$

$\overline{\Rightarrow} := \Rightarrow \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ — расширенная числовая прямая

$\operatorname{cone} C$, иногда $\operatorname{co} C$, — линейная оболочка множества C

$\operatorname{conv} C$ — выпуклая оболочка множества C

$\operatorname{dom} f$ — эффективное множество функции f

$\operatorname{epi} f$ — надграфик функции f

$\operatorname{def} A(x)$ — индикаторная функция выпуклого множества A

$sA(y)$ — опорная функция множества A

$\partial f(\hat{x})$ — субдифференциал выпуклой функции f в точке $\hat{x}$

$\operatorname{def}_+ f(\hat{x}, h)$ — производная по направлению h отображения f в точке $\hat{x}$

$\operatorname{def} f(\hat{x}, \cdot)$ — вариация по Лагранжу отображения f в точке $\hat{x}$

$f'_G(\hat{x})$ — производная Гато отображения f в точке $\hat{x}$

$f'(\hat{x})[h]$ — действие производной (Фреше) $f'(\hat{x})$ на элемент h

$SD(\hat{x})$ — множество отображений строго дифференцируемых в точке $\hat{x}$

$\psi \circ \varphi$ — суперпозиция отображений φ и ψ, $(\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x))$

$\mathring{B}(\hat{x}, \operatorname{def})$ — открытый шар радиуса def с центром в точке $\hat{x}$

$T_{\hat{x}} M$ — множество всех касательных векторов к множеству M в точке $\hat{x}$

$T^+_{\hat{x}} M$ — множество односторонних касательных векторов к множеству M в точке $\hat{x}$

x_b (A_b) — базисный вектор (матрица) в линейном программировании

x_n (A_n) — небазисный вектор (матрица)

f^* — сопряженная (в смысле Лежандра) функция к функции f

f^{**} — вторая сопряженная функция к функции f

P^{**} — двойственная задача к задаче P

$E(P)$ — множество экстремалей в задаче (P)

$DE(P)$ — множество допустимых экстремалей в задаче (P)

wlocmin (wlocmax, wlocextr) — слабый локальный минимум (максимум, экстремум)

strlocmin (strlocmax, strlocextr) — сильный локальный минимум (максимум, экстремум)

$PC(\Delta, \Rightarrow^n)$ — пространство кусочно-непрерывных на отрезке Δ вектор-функций

$PC^1(\Delta, \Rightarrow^n)$ — пространство кусочно-дифференцируемых на отрезке Δ вектор-функций

$C_0^1([t_0, t_1]) = \{h(\cdot) \in C^1([t_0, t_1]) \mid h(t_0) = h(t_1) = 0\}$

$\Gamma_{\hat{x}} := \{(t, \hat{x}(t)) \mid t \in [t_0, t_1]\}$ — график функции $\hat{x}$

$\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}} := \{(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \mid t \in [t_0, t_1]\}$ — расширенный график функции $\hat{x}$

$\mathcal{O}(A)$ — (открытая) окрестность множества A

Предметный указатель

А

В

Д

З

И

К

Л

М

Н

О

П

Сведения об авторах

Галеев Эльфат Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры общих проблем управления механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. Автор более 75 научных работ, в том числе ряда монографий по теории экстремальных задач. Научные интересы: теория приближений, теория экстремальных задач.

Тихомиров Владимир Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой общих проблем управления механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. Автор более 140 научных работ, в том числе ряда монографий по теории экстремальных задач и теории приближений. Научные интересы: теория приближений, теория экстремальных задач.

Оглавление

ЧАСТЬ II

Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров

Оптимизация: теория, примеры, задачи

Директор — Доминго Марин Рикой
Заместители директора — Наталья Финогенова, Ирина Макеева
Администратор — Леонид Иосилевич
Компьютерный дизайн — Виктор Романов
Главный редактор — Елена Кудряшова
Верстка — Наталия Бекетова
Обработка текста — Евгений Макаров, Андрей Стулов
Техническая поддержка — Наталья Аринчева, Анна Тюрина
Менеджер по продажам — Алексей Петяев

Издательство «Эдиториал УРСС». 113208, г. Москва, ул. Чертановская, д. 2/11, к.п. Лицензия ЛР № 064418 от 24.01.96 г. Гигиенический сертификат на выпуск книжной продукции № 77.ФЦ.8.953.П.270.3.99 от 30.03.99 г. Подписано к печати 20.07.2000 г. Формат 60×88/16. Тираж 1000 экз. Печ. л. 20. Зак. № 60.

Отпечатано в АООТ «Политех-4». 129110, г. Москва, ул. Б. Переяславская, 46.